✠

ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EUCLIDES,

DISPUESTOS EN METHODO BREVE, Y FACIL,

PARA MAYOR COMODIDAD de los aficionados, y uso del Real Seminario de Nobles de Madrid.

SU AUTOR

EL PADRE GASPAR ALVAREZ de la Compañia de Jesus, Maestro de Mathematicas en el mismo Real Seminario.

DEDICADOS AL GLORIOSISSIMO JESUITA, SAN LUIS GONZAGA, PATRON DE TODOS LOS ESTUDIOS DE LA COMPAÑIA.

En Madrid: En la Oficina de la calle Angosta de San Bernardo. Año de 1739.

ELEMENTOS GEOMETRICOS DE EUCLIDES

DISPUESTOS EN METHODO BREVE,

Y FACIL,

PARA LA MAYOR COMODIDAD

de los aficionados, y uso del Real
Seminario de Nobles de
Madrid.

SU AUTOR

EL PADRE GASPAR ALVAREZ

de la Comp. de Jesus, Maestro de Mathematicas
[illegible] del Seminario.

DEDICADOS

AL GLORIOSISSIMO JESUITA,

SAN LUIS GONZAGA,

[illegible]

DE LA COMPAÑIA.

[illegible]

LICENCIA DE LA RELIGION.

GInès de Montoya, Provincial de la Compañia de Jesus, en la Provincia de Toledo: Por particular comission que tengo de N. M. R. P. General Francisco Retz, doy licencia para que se imprima un Libro, intitulado: *Elementos Geometricos de Euclides*, compuesto por el P. Gaspar Alvarez, Religioso de la Compañia, el qual ha sido visto, y examinado por personas graves, y doctas de nuestra Religion: En testimonio de lo qual, dì esta firmada de mi nombre, y sellada con el Sello de mi Oficio. Madrid à primero de Abril de mil seiscientos y treinta y ocho años.

Ginès de Montoya.

APROBACION DEL P. JOSEPH CASANI, de la Compañia de Jesus, Maestro que ha sido de Mathematicas en su Colegio Imperial de Madrid, Calificador del Supremo Consejo de la Santa, y General Inquisicion.

DE orden del señor Licenciado Don Diego Moreno, Theniente Vicario de la Villa de Madrid, y su Partido, he visto, con gran gusto mio, el Libro, cuyo titulo es: *Elementos Geometricos de Euclides*, compuesto por el P. Gaspar Alvarez, de nuestra Compañia, Maestro de Mathematicas en el Real Seminario de Nobles, para uso, y provecho de sus Cavalleros Seminaristas. Confiesso con ingenuidad, que leyendo con delicia las hojas, me he admirado de vèr en tan poco tiempo, como el Padre ha tenido para enterarse de lo dilatado de estas Facultades, lo bien digerido de las especies, lo claro de la explicacion, y lo bien ordenado de la Obra, como de entendimiento, que haviendo en lo interior de sus senos separado, y colocado ordenadamente las idèas, las traslada al papel, formando una pintura tan

di-

divertida, como de enseñanza: el ser de suma enseñanza, lo lleva de suyo el assumpto: el divertir con lo mismo que explica, es destreza del pincèl. Notorio es à todos los que conocemos al Author la felicidad de su ingenio, y la aplicacion, y genio para las mayores Facultades; no obstante este aplicado estudio, debe hacer à todos harmoniosa consonancia, al considerar, que en lo physico de la naturaleza, para convertir el alimento en propia substancia, aun el calor natural necessita precisamente del tiempo; y aun para estudiar la Facultad, no parece que ha tenido lugar el mismo, que dà à luz el parto lucidissimo, y el sazonado fruto, que se lee en este Libro.

La disposicion facilita mucho la explicacion de las proposiciones: omite algunas por menos utiles; pero las cita, para que no haga falta en alguna ocasion su noticia. Otras citadas en su lugar, difiere su demostracion à otro, en que suaviza mucho el modo de demostrarlas. En lo antiguo, ninguno invirtiò el orden que puso Euclides, guardando este respeto, no tanto al primer Author, y Principe de la Geometria, quanto por atender à los discipulos, y à los aplicados, porque citandose en todos los Authores por libros, y numeros, no se haràn inteligibles los libros, si estàn invertidas las proposiciones: en el siglo passado quisieron romper esta dificultad algunos ingenios, y es cierto que algunos facilitaron el estudio, pero quedò en su vigor el inconveniente: Nuestro Author con discrecion atiende à todo, facilita el estudio, como los mas modernos; y atiende à no perder el hilo de oro, como los antiguos; halla el medio, que es el camino que siempre toma la discrecion.

El assumpto, y el fin, ni puede ser mas noble, ni mas util. Es este Libro una llave, que abre la puerta à todas las Facultades Mathematicas. Hallase el Author Maestro en el Real Seminario de Cavalleros Nobles, que ha fundado la generosa magnificiencia del Rey nuestro señor (Dios le guarde) Don Phelipe V. Es este Real Seminario, y Real Casa, Escuela general, ò Universidad, donde se crie la Nobleza de España, en Virtud, Letras, y Policia: salen adiestrados en todas aquellas habilidadades, que ſon muy propias de la Nobleza, y en aquellos Eſtudios, que les pueden pertenecer, aſsi por ornamento de ſu ſangre, como para los altos miniſterios, y glorioſos empleos, à que deſde que ſon, los ha deſtinado ſu miſmo nacimiento: A eſte fin, ninguna Facultad mas util, quando no diga neceſſaria, que la aplicacion à las Mathematicas: la noticia, y explicacion de la Fortificacion: arte de Eſquadronar, y de Fuegos para el General de Exercitos: el uſo de la navegacion, para el govierno de las Armadas: las noticias de Geographia: Globo terraqueo para el que govierna: las curioſidades de la eſphera, para la converſacion, y familiar trato, en donde ſe lucen las prendas: la diſcrecion, y el util uſo del tiempo: el manejo eſcientifico en la Deſtreza: la diverſion de la Muſica. Son prendas todas de tanto adorno à la Nobleza, que ſe echan mucho menos donde faltan, y ſu utilidad ſe reconoce mucho por ſu defecto; quiero decir, ſon propiedades, que vienen tan naturales à la Nobleza, que hacen falta donde eſtà violenta ſu ignorancia; por eſto pocos Libros pueden ſer mas utiles, que el preſente, al

uſo,

uso, y conveniencia de un Seminario de Nobles.

Añadirè yo, y con gran gusto, que siendo el Seminario plantel, donde se cria la juventud de la Nobleza, nada mas importante, que abrir, y despertar el entendimiento recien nacido, y dàr exercicio al ingenio, para que despierto sirva à las gloriosas ocupaciones, que les tiene prevenida su sangre. A este fin ningun estudio dice Platòn en sus Dialogos de Republica, como el exercitarse en el estudio de las Mathematicas; y para ser creido, protesta que habla por experiencia, sus palabras son de oro, y quiero yo ponerlas negras con mi tinta, y assi las escribo, como en su original: *Animadvertisti eos qui natura Mathematici sunt, ad omnes ferè disciplinas acutiores apparere; qui autem ingenio hebetiore sunt, si in hac erudiantur, etiam si nihil amplius utilitatis assequantur, se ipsis tamen ingeniosiores effici solere. Quæ enim difficiliorem addiscenti, cogitantique laborem, curamque ingerat, non facilè ullam ex rationalibus præter hanc invenies.*

Yà avreis dice notado, que los que por naturaleza son Mathematicos, son habilisſimos para qualquier Facultad; y los que parecian detenidos, torpes, y dificiles en el diſcurſo, è ingenio, ſi ſe aplican à eſte eſtudio, ſe deſpejan, y ſe habilitan tanto, que ſuelen ſalir ingenioſiſsimos, y habiliſsimos para todo: utilidad, que debe combidar à todos para eſtudio, que aunque no tuviera otro bien, eſte ſolo es de ſuma importancia; y à la verdad, eſta utilidad es intrinſeca de eſte eſtudio, porque entre ciencias naturales, ninguna ay, que por sì cebe tanto, ni excite mas el deſeo de ſaber. O ſi pudiera yo imbuir en el entendimiento de cada ſeñor padre de Cavallero Siminariſta eſte dictamen, para que todos ſe dedicàran à tan util tarèa, y mas à viſta de eſte Libro. Pues ſi dixo la diſcrecion de Ambroſio: *Primus diſcendi ardor, nobilitas eſt Magiſtri*, que la Nobleza, diſcrecion, habilidad, doctrina, y magiſterio del Maeſtro, es el primer ardor, que excita el deſeo de ſaber, viendo, y leyendo en eſte Libro, pintada à lo vivo la ſutil habilidad de ſu Author, en todos ſe debe excitar el deſeo de ſer ſus diſcipulos.

Por lo qual, no teniendo este Libro cosa contra nuestra Santa Fè, y buenas costumbres, soy de parecer se le debe conceder la licencia que pide, con muchos agradecimientos de el bien publico por su trabajo. Assi lo siento, *salvo, &c.* en el Colegio Imperial de la Compañia de Jesus de Madrid, à primero de Abril de 1738.

JHS.

Joseph Casani.

LICENCIA DEL ORDINARIO.

NOS el Lic. Don Diego Moreno Ortiz, Theniente Vicario de esta Villa de Madrid, y su Partido, &c. Por la presente, y por lo que à Nos toca, damos licencia para que se pueda imprimir, è imprima el Libro, intitulado: *Elementos Geometricos de Euclides*, su Autor el Rmo. Padre Gaspar Alvarez, de la Compañia de Jesus: Atento que de nuestra orden, y mandado se ha visto, y reconocido, y no parece tiene, ni contiene cosa que se oponga à nuestra Santa Fè Catholica, y buenas costumbres. Dada en Madrid à 28. de Febrero, año de 1738.

Lic. Moreno.

Por su mandado,

Antonio de Samaniego y Santullan.

APROBACION DE DON SALVADOR *Joseph Mañer, Visitador de la Real Junta de Comercio.*

M. P. S.

DE orden de V. A. tengo visto el Libro: *Elementos Geometricos de Euclides*, compuesto por el M.R.P. Gaspar Alvarez, de la Compañia de Jesus, Maestro de Mathematicas en el Real Seminario de Nobles de esta Corte; y à no ser las Aprobaciones tan establecido estilo, tuviera la mia por superflua, bastando la del solo el nombre del Author, teniendolo tan acreditado en los muchos actos literarios, que en este assumpto con tanto lustre ha visto la Corte en el mismo Real Seminario. Su zelo à que se adelante en España una ciencia tan util, como son las Mathematicas, le ha obligado à emprehender este trabajo, que aunque en el espacio de dos mil años, le han emprehendido otros muchos, reducido à la brevedad que en la presente Obra se halla, me parece ser necessario mucho lince para encontrar alguno, que à tan pequeño volumen aya reducido materia tan

tan

tan dilatada: esto contribuye otro tanto, para dàr animo, y facilitar la escabrosa entrada à las Mathematicas, de que el publico debe quedarle agradecido; y por esto, y no tener cosa alguna que se oponga à nuestra Santa Fè, buenas costumbres, y regalìas de su Mageſtad, soy de parecer puede V. A. dàr la licencia que solicita, *salvo, &c.* Madrid, y Febrero 22. de 1738.

Salvador Joseph Mañer.

SUMA

SUMA DEL PRIVILEGIO.

Tiene el P. Gaspar Alvarez, de la Compañia de Jesus, Licencia, y Privilegio de su Magestad, (que Dios guarde) para por tiempo de diez años poder imprimir, y vender un Libro, intitulado: *Elementos Geometricos de Euclides*, y que ningun otro lo pueda hacer sin su licencia, baxo las penas que incurren los que usan de Privilegio ageno, como mas largamente consta de la Real Cedula, que queda en su poder. Dada en el Pardo à 25. de Marzo de 1738. firmada del Rey nuestro Señor, refrendada de Don Francisco Xavier de Morales Velasco, y por el Oficio de Don Miguèl Fernandez Munilla. YO EL REY. Por mandado del Rey nuestro Señor. Don Francisco Xavier de Morales Velasco.

D. Miguèl Fernandez Munilla,
Secretario.

FEE DE ERRATAS.

PAG. 2. lin. 1. Difiniciones, lee *Definiciones*. Pag. 14. lin. 7. tales, lee *totales*. Pag. 25. lin. 8. SR. lee *S.R.* Ibid. lin. 23. RS. lee *S*. Pag. 28. lin. 4. equidistintas, lee *equidistantes*. Pag. 29. figur. 24. lee 34. Pag. 31. lin. 15. RC. lee *RD*. Pag. 33. lin. 26. AS. à GR lee *AS paralela à CR*. Pag 37. lin. 12. ABED. lee *ABCD*. Pag. 45 lin. 21. CB. lee *CA*. Pag. 64. lin. 23. X. lee *P*. Pag. 68. lin. 23. ABC. lee *BAC*. Pag. 75. lin. 20. dados, lee *lados*. Pag. 82. lin. 3. pentagono, lee *triangulo*. Pag. 87. lin. 11. CO BR. lee *CT. RO*. Pag. 91. Def. lee *figur. lamina 3*. Pag. 110. lin. 9. proporcionales, lee *proporciones*. Pag. 119. lin. 11. CB. lee *CA*. Pag. 137. lin. 6. AC. lee *RC*. Pag. 151. lin. 22. BR. lee *ER*. Pag 152. lin. 16. AEY. lee *EH*. Pag. 159. lin. 12. EB. lee *DB*.

Este Libro, que he visto, intitulado: *Elementos Geometricos de Euclides*, compuesto por Rmo. Padre Gaspar Alvarez, de la Compañia de Jesus, Maestro de Mathematicas en el Real Seminario de Nobles de esta Corte, viene conforme con estas erratas à su original. Madrid à 24. de Septiembre de 1739.

Lic. D. Manuel Licardo de Rivera.
Correct. General por su Mag.

SUMA

SUMA DE LA TASSA.

DON Miguèl Fernandez Munilla, Secretario del Rey nuestro Señor, Escrivano de Camara mas antiguo, y de Govierno del Consejo: Certifico, que haviendose visto por los Señores de èl, un Libro intitulado: *Elementos Geometricos de Euclides*, su Author el P. Gaspar Alvarez, de la Compañia de Jesus, Maestro de Mathematicas, en su Colegio de Nobles de esta Corte, que con licencia de dichos Señores, concedida al susodicho, ha sido impresso, tassaron à seis maravedis cada pliego, y el referido Libro pareçe tiene veinte y tres pliegos, sin principios, ni tablas, que à este respecto importa ciento y treinta y ocho maravedis, y al referido precio, y no mas mandaron se venda, y que esta Certificacion se ponga al principio de cada Libro, para que se sepa el à que se ha de vender. Y para que conste, lo firmè en Madrid à primero de Octubre de 1739. años.

D. Miguèl Fernandez Munilla.

AL

AL LECTOR.

QUAM utiles, y aun precisas sean las Mathematicas en lo Militar, Politico, y Civil: quam elevadas en lo scientifico, y sublime de sus demostraciones: quam agradables en muchos de sus tratados, que brindando con mil curiosidades el gusto, enriquecen el entendimiento con noticias bien singulares, fuera ocioso detenerme aprobarlo. Y no obstante de tener esta ciencia noble alicientes tan impulsivos, veo en nuestro Paìs à su estudio aficionados bien pocos, y aun sugetos, que con sus buenas prendas quieren bizarrear en todo genero de erudicion, y literatura: tienen à la Mathematica un cierto genero de horror, con que creen ser un laberinto confuso, en cuyo recinto se oculta el Minotauro, que se traga à los, que en lo interior se intro-

¶¶¶ du-

ducen. Proviene esto, como la experiencia lo muestra, de que si alguna vez se determinan à aplicarse à este util estudio, lo primero con que tropiezan, es con los Elementos, primeros, y essenciales principios de esta ciencia. Digo, tropiezan, porque es à la verdad tropiezo encontrarse desde luego con un gran numero de proposiciones especulativas, y abstractas, entre las quales son dificiles, y espinosas muchas, en que aùn los terminos son nuevos, sin que descubran por entonces los principiantes la utilidad, à que se dirigen: de donde nace, ò que en viendo el Libro se ha tierran, ò que à pocos passos se cansan, siendo algunos los que quieren empezar, pocos los que empiezan, y menos los que prosiguen. Esta falta de aplicacion à estudio tan importante, bien la sienten los que tienen algun zelo: assi en este particular explica su desconsuelo el eruditissimo Feyjoò con la alta reflexion,

xion, maduro juicio, y sublime, y esquisita discrecion, que acostumbra, tom. 3. disc. 7. §. 1.

Por esto tengo por muy util qualquier trabajo, que se ponga en facilitar la entrada à este, que algunos juzgan Palacio encantado, y es à la verdad el mas precioso erario de la naturaleza. Este es el trabajo, que yo tomo al presente; porque si bien es verdad, que ay de varios Authores Elementos trabajados con gran magisterio, ha sido comun seguir las demostraciones de Euclides, sobremanera prolijas: y si algunos por mayor facilidad han immutado, lo que con singular empeño, y utilidad hizo el P. Andrès Taquet, Jesuita, ò son rarissimos los exemplares, ò no estàn en nuestro idioma Español para el uso facil de todos, ò aùn acaso en nuestros Elementos se les adelanta en algunas demostraciones, que salen mas claras, y breves. De los que andan entre las manos, que son el P. Kresa, y el Doctor D. Vicente Tosca: el primero, aunque tiene sus Elementos excelentemente demostrados, es demasiadamente prolijo, y à los jovenes, y aun à los que no lo son, se les caen las alas del corazon, quando el volumen se les pone en las manos; y la experiencia de explicar à este Author, me ha hecho conocer, que con mucho trabajo se gasta mas tiempo de lo justo, que podria con mas utilidad emplearse en otros tratados. Los de Tosca, aunque mas breves, tienen el conocido inconveniente de no andar sino juntos con toda la Obra, y es cosa dura, al que quiere estudiar Elementos para dos, ò tres materias, que necessita, obligarle à comprar nueve Tomos, que nunca ha de estudiar; y aun quando anduvieran sueltos, siempre les hiciera falta el Libro quarto, que colocandole su Author en la Geometrìa practica, en los Elementos por entero se omite.

Es-

Esto me determinò à sacar esta Obrita, singularmente para mis discipulos los Cavalleros Seminaristas de este Real de Nobles, à quienes ha algunos años tengo el honor de enseñarles las Mathematicas, y el vehemente deseo, que del aprovechamiento de estos Cavalleros tenemos todos los Jesuitas, à cuya direccion estàn encargados, como obliga à los demàs à muchos sudores, me ha impelido à mi à escribir estos Elementos, que aunque breves, no creo sabràn menos con ellos, que con otros aun mas prolijos. Para esto me he valido de qualquiera de los Comentadores de Euclides, que en el assumpto ayan podido ayudarme. De las proposiciones, solo omito aquellas, que, ò en los tratados superiores yà no tienen uso, ò que solo sirven para demostrar en los mismos Elementos alguna proposicion posterior, que si esta se demuestra sin la otra, yà queda del todo inutil; no obstante,

en

en las siguientes conservò siempre el mismo numero, que han tenido por tantos siglos, porque de lo contrario se seguiria conocido inconveniente en las citas. Algunas veces, aunque pocas, se remite à otro lugar la demostracion de algunas proposiciones, ò se dexa la de algunas, que son puros Axiomas; porque si bien el orden, à que las reduxo Euclides, es admirable: no poder variar en algun accidente, y cansar à los principiantes, probandoles con demostraciones largas verdades por sì patentes, lo tengo por un cierto genero de supersticion; y esta estrecha regidèz es, quien hace los Elementos pesados, y dificiles, lo que obligò al sabio Ferronio, à llamarlos estrecha carcel de Euclides, y à Gottignies, Jesuita, excelente Geometra de Bruselas, à buscar nuevos cimientos à la Geometrìa, distintos por entero de los de Euclides. Mario-Bettino invierte al antiguo orden de los Libros, por bus-

In judicio de Logistica universali.

buscar methodo mas facil, y el P. Tacquet, varias enredosas proposiciones del Libro once, dice, se podian poner entre los postulados: con que si yo por conveniencia de los que estudian, les variaré el lugar à algunas demostraciones, no creo, que avrè cometido mucho pecado; ni tampoco en aver omitido alguna demostracion, quando concurren muchas synonomas, ò quando no la creo necessaria. El que todo lo quisiere por extenso, podrà entretenerse despacio con el P. Mario Bettino, que de sola ésta materia tiene tres Tomos bien gruessos: con Guarin Guarino en su *Euclides adauctus*; ò con el P. Clavio en sus *Elementos*, que cada uno tiene un gran Tomo de à folio: y de libros de este genero, por su pesadèz, dice el P. Dechales, que pocos los rebuelven; y no hacen à la verdad otra cosa, que meter en los Elementos infinitas proposiciones de otros tratados. Yo he

 que-

querido dàr puramente en sì los Elementos; y como he ahorrado mucho de proposiciones prolijas, he tenido lugar, sin ser largo, de poner algunos Corolarios utiles, y algunas explicaciones, que no se hallan en otros, haciendo de estas explicaciones tanto caudal, que mas querria faltar en alguna demostracion, que en la explicacion; porque demostraciones se hallan en todos Libros, y no en todos se encuentra la explicacion conveniente para la inteligencia. Finalmente he querido dàr los Elementos en un Librito tan chico, que èl por sì mismo atrayga, y combide à su estudio. Leele, si te agrada, y aprende en èl los fundamentos de una nobilissima ciencia. VALE.

LIBRO

JHS.

LIBRO PRIMERO.

EXPLICACION DE ALGUNOS Terminos.

THeorema es una proposicion, que afirma, convenir, ò no convenir al sugeto alguna cosa.

Problema, la proposicion que, dà modo de executar alguna operacion.

Lema, proposicion previa para la demonstracion de otra.

Porisma, la que para la invencion, è investigacion de alguna verdad se propone: *En que se vè equivocarse bastantemente con las otras especies de proposiciones.*

Corolario, doctrina, que se deduce de alguna proposicion yà probada.

Escholio, es anotacion, ò explicacion de la proposicion.

Postulado, cosa que se pide, y se concede poderse executar.

DIFINICIONES.

1 PUNTO es, el que no tiene partes.

El punto Mathematico es distinto de los puntos Genonicos, que son materia de largas disputas: pues el Mathematico es sin partes, por la abstracion del entendimiento.

2 Linea es, una longitud sin latitud.

3 Los extremos de la linea, son puntos.

4 Linea recta es, la mas breve, que se puede tirar entre dos puntos: como AB. *porque qualquiera otra, que estè entre los mismos puntos, y sea mas larga como A. C. B. es curva.* Figur. 1.

5 Superficie, la que tiene solamente longitud, y latitud.

6 Los terminos de la superficie, son lineas.

7 Superficie plana es, à quien se puede acomodar una linea recta por todas partes.

8 Angulo plano es, la inclinacion de dos lineas, que en el mismo plano se tocan, y no componen una linea recta.

An-

9 Angulo rectilineo es, el que està comprehendido de lineas rectas, como A. curvilineo de lineas curvas, como B. ò C. mixtilineo de recta, y curva, como D. Figur. 2.

Siendo el angulo inclinacion de las lineas, se vè manifiestamente, que el ser el angulo mayor, ò menor, no depende de ser mas largas, ò menos las lineas, que le forman; sino solo de tener entre sì las lineas mas, ò menos abertura: por esso el angulo B. aunque de menores lineas, es mayor que el A. que està contenido de lineas mayores. Figur. 3.

10. Quando una linea recta cayendo sobre otra recta, hace los angulos de una y otra parte iguales entre sì: los tales angulos se llaman rectos, y la linea se llama perpendicular.

11. *Para mayor inteligencia se ha de suponer, que los Mathematicos dividen todo el circulo en 360. partes iguales, que llaman grados: cada grado se divide en 60. minutos, cada minuto en 60. segundos &c. Siendo, como es, el circulo la medida de los angulos, la porcion, ò arco de circulo, que à cada angulo corresponde, es su propria medida.* Veafe la figura 4. Figur. 4.
Cayga la linea A. S. sobre la C. B. haciendo los angulos ASB: ASC. iguales entre sì: estos

dos angulos se llaman rectos, y la AS. se llama perpendicular. Donde se vè, que à cada angulo de estos, como ASB. le corresponde por medida un quadrante, ò una quarta parte del circulo; y siendo todo el circulo 360. grados, le tocan 90. al angulo recto.

Figur. 4. 11 Angulo obtuso es, el que es mayor que un recto, ò el que tiene mas de 90. grados, como OSB.

12 Agudo, el que es menor que un recto, ò tiene menos de 90. grados, como OSD.

13 Termino es, el extremo de cada cosa.

14 Figura es, la que està contenida de alguno, ò algunos terminos.

Dicese de alguno, por el circulo que està contenido de una sola linea: ò de algunos por las figuras rectilineas, que estàn contenidas de muchas.

15 Circulo es, una figura plana contenida de una sola linea, llamada circunferencia, hasta la qual todas las rectas, tiradas de un punto, que està dentro del circulo, y se llama centro, son iguales entre sì.

Figur. 4. 16 Diametro del circulo es, una recta, ta, que tirada por el centro, y de ambas partes terminada en la circunferencia, divide el circulo en dos partes iguales.

17 Semicirculo es, la mitad del circulo.

En la figura 4. el circulo es ABDC. el diametro es AD, ò CB. el semicirculo CAB. el centro es S.

18 Figura rectilinea es, la que està contenida de lineas rectas.

19 Las que estàn contenidas de tres, se llaman trilateras: las que de quatro, quadrilateras: las que de mas, multilateras.

20 De las trilateras, la que tiene todos sus lados iguales, se llama triangulo equilatero, como A. Figur. 5.

21 La que dos lados iguales, triangulo isosceles, como B.

22 La que todos tres lados desiguales, escaleno, como C.

Esto es respecto de las lineas, que componen los triangulos: respecto de los angulos, se llaman.

23 Rectangulo, el que tiene un angulo recto, como A. *sin confundir los nombres de rectangulo, y rectilineo.* Figur. 6.

24 Obtusangulo, ò amblygonio, el que

que tiene un angulo obtuſo, como B.

25 Acutangulo, ù oxygonio, el que tiene todos tres angulos agudos, como C.

26 De las figuras quadrilateras, el quadrado tiene todos los lados iguales, y
Figur. 7. todos los angulos rectos, como A.

27 Quadrilongo es, el que tiene los quatro angulos rectos: pero no todos los lados iguales, ſino ſolo cada dos opueſtos entre sì, como B.

28 Rombo tiene todos ſus lados iguales, y ningun angulo recto, como C.

29 Romboydes tiene lados, y angulos opueſtos iguales, pero ni es equilatera, ni equiangula, como D.

30 Fuera de eſtas, qualquiera otra figura quadrilatera ſe llama trapezio, como E.

31 Paralelas ſon lineas rectas, que eſtando en un miſmo plano, por mas que àzia qualquiera parte ſe alarguen, conſervan ſiempre igual diſtancia entre sì, como
Figur. 1. las DF. HG.

32 Paralelogramo es, una figura quadrilatera, cuyos lados opueſtos ſon parale-
Figur. 8. los, como la figura BCDF.

33 Quando en un paralelogramo ſe tira

tira un diametro, y por un punto suyo dos paralelas à los lados, de modo, que quede dividido en quatro paralelogramos: los dos por quienes passa el diametro, se llaman circa diametrum, como O. S. los otros, como P. R. sus complementos.

Adviertase, que los Mathematicos por mayor brevedad, suelen nombrar el paralelogramo con solas las dos letras, que estàn en los angulos opuestos, como DC.

Los angulos (en que suelen confundirse mucho los principiantes) basta nombrarlos con una letra sola, quando no ay razon de equivocacion: pero quando puede averla, se nombran con tres letras, para denotar las lineas que le forman, y la letra de en medio denota el angulo, de que se habla; v. gr. En la figura 9. quando se dice el angulo CDB. se denota solo el angulo, que tiene la cruz: quando se dice RDB. se denotan los dos juntos, el negro, y el de la cruz; y quando se dice RDA, se significan todos tres juntos, el negro, el de la cruz, y el blanco. Figur. 9.

POSTULADOS.

1 Tirar una linea recta de qualquier punto à qualquier punto dado.

Alar-

2 Alargar una recta quanto se quisiere.

3 Desde qualquier centro, con qualquier intervalo describir un circulo.

AXIOMAS.

1 Las cosas, que son iguales à una tercera, son iguales entre sì.

2 Si à iguales se añaden iguales, los todos seràn iguales.

3 Si de iguales se quitan iguales, los residuos seràn iguales.

4 Si à desiguales se añaden iguales, los todos seràn desiguales.

5 Si de desiguales se quitan iguales, los residuos seran desiguales.

6 Los que respecto del mismo, ò son duplos, ò son mitades, son iguales entre sì.

7 Las cosas, que entre sì se ajustan, son iguales: *No al contrario.*

8 El todo es mayor, que su parte, è igual à todas sus partes juntas.

9 Todos los angulos rectos, son iguales entre sì.

10 Si una linea recta, cayendo sobre dos rectas, hace los angulos internos, y de la

la misma parte menores, que dos rectos, alargadas las tales lineas, concurriràn àzia aquella parte, àzia donde hacen los angulos menores, que dos rectos. *Sobre las BE. RD. cayga la AS. haciendo los angulos ECO. DOC. menores que dos rectos: las BE. y RD. alargadas, concurriràn àzia los puntos D. E.* Figur. 10.

A este principio algunos con Proclo, y Gemino, no dàn lugar entre los Axiomas: pero ademàs de que por sì es claro, està demonstrado en los Padres Clavio, prop. 28. lib. 1. y Tacquet, prop. 31. lib. 1.

11 Dos lineas rectas, no cierran espacio.

PROBLEMA I. PROPOSICION I.

Sobre una recta dada terminada, formar un triangulo equilatero. Figur. 11.

Sobre la recta dada BC. se ha de formar un triangulo equilatero. De los puntos B. y C. con la distancia (a) BC. haganse los arcos de circulo, que se corten como en A. tirense (b) las AB. AC. y està hecho: porque siendo las BA. y AC. iguales (c) à la BC. son iguales (d) entre sì: luego todas tres son iguales, y el triangulo es (e) equilatero, que es lo que se avia de hacer.

(a) Post. 3.
(b) Post. 1.
(c) Defin. 15.
(d) Axiom. 1.
(e) Defin. 20.

PROB. II. PROP. II.

Figur. 12. *Dada una linea, y dado un punto, tirar desde èl una recta igual à una recta dada.*

Desde el punto B. se ha de tirar una recta igual à la linea A. Tomese con el compàs la A. y passesse essa distancia desde B. v. gr. (a) à C. la BC. es igual à la (b) A. y desde el punto dado B. dado, que es lo &c.

(a) Post. 3.
(b) Def. 15.

PROB. III. PROP. III.

Dadas dos lineas rectas desiguales, cortar de la mayor una igual à la menor.

Figur. 12. De la mayor RS. se ha de cortar una igual à O. Tomese con el compàs la O. y (a) desde R. pongase hasta que corte, v. gra en D. digo, que RD. es igual (b) à O. que es, &c.

(a) Post. 3.
(b) Def. 15.

THEOREMA I. PROP. IV.

Si dos triangulos tienen dos lados iguales à dos lados, cada uno al suyo, y entre estos lados comprehendieren iguales angulos, tendràn tambien iguales bases, y los angulos sobre las bases seràn tambien iguales.

Ima-

Imaginese el triangulo señalado con el numero 1. puesto sobre el señalado con el numero 2. y por suponerse los lados BA. y AC. iguales à los OD. y DS. y el angulo A. igual à D. los puntos ABC. cairàn sobre los ODS. y la base BC. sobre la OS. no cayendo mas arriba, ò mas abaxo, por suponerse ser linea recta, que debe (a) ser la mas breve: luego los dos triangulos perfectamente se ajustan: luego (b) son iguales; y el angulo B. lo es al O. y el C. al S. que es lo que se avia de demostrar. Figur. 13. (a) Def. 4. (b) Axiom. 7.

THEOR. II. PROP. V.

En los triangulos isosceles, los angulos sobre la base, son iguales. Figur. 14.

En el triangulo señalado con el numero 1. sean iguales los lados AB. BC. digo, que los angulos A. C. sobre la base son iguales. Imaginese, que este triangulo dà una buelta, y queda puesto como en el numero 2. estos dos triangulos, que se imaginan, tienen dos lados iguales à dos lados, y el angulo B. comprehendido igual: luego (a) tienen la base, y los angulos sobre ella iguales: luego el angulo A. del primero, es (a) Prop. 4.

 igual

igual al angulo C. del ſegundo; pero el C. del ſegundo, es el C. del primero: luego en el primero los angulos A. y C. ſon iguales, que es, &c.

COROLARIO.

El triangulo, que tiene todos tres lados iguales, todos tres angulos tiene iguales.

THEOR. III. PROP. VI.

Si un triangulo tiene dos angulos iguales, tiene iguales los lados, que se oponen à dichos angulos.

Figur. 15. En el triangulo ABC. por ſuponerſe iguales los angulos B.C. digo, que los lados AB. AC. ſon iguales; porque ſi no, ſea mayor AB. y corteſe (a) BD. igual à CA: luego los triangulos el negro, y el ACB. tienen los lados DB. BC. iguales à BC. CA. y los angulos comprehendidos B. y ACB. iguales: luego los triangulos el negro, y el ACB. ſon (b) totalmente iguales; la parte à ſu todo, lo que no puede (c) ſer.

(a) Prop. 3.

(b) Prop. 4.

(c) Axiom. 8.

CO-

COROLARIO.

Todo triangulo equiangulo, es equilatero, porque respecto del tercer lado se hace la misma demostracion.

THEOR. IV. PROP. VII.

Si dos lineas rectas tiradas de las extremidades de una misma recta, se encuentran en un punto, no se podràn tirar de las mismas extremidades à otro punto, y àzia la misma parte otras dos lineas rectas iguales à las primeras, cada una à la que nace de la misma extremidad.

Sirve para demostrar la octava, que se demostrarà sin ella.

THEOR. V. PROP. VIII.

Si dos triangulos tienen dos lados iguales à dos lados, y las bases iguales, tienen los angulos opuestos à las bases iguales. Figur. 16.

Sean los triangulos BAC. EDR. que tengan los lados BA. ED. y los AC. RD. iguales; y por ser las bases iguales, sobrepues-

puesta la una à la otra se ajustaràn, como en BC. digo, que los angulos D. A. son iguales; porque tirada la recta DA. el triangulo ACD. es isosceles: luego los angulos
(a) Prop. 5. CDA. CAD. son (a) iguales; por la misma razon son iguales los BDA. BAD. en el triangulo isosceles ABD. luego los tales
(b) Axiom. 2. BDC. BAC. son (b) iguales, que es, &c.

PROB. IV. PROP. IX.

Cortar en dos angulos iguales un angulo rectilineo dado.

Figur. 17. Sea el angulo B. el que se ha de cortar:
(a) Prop. 3. tomense AB. BC. (a) iguales: tirese la AC. desde los puntos A.C. con la distancia AC.
(b) Post. 3. describanse (b) los arcos, que se corten en O. tirense las OA. OC. digo, que la OB. tirada del punto O. divide el angulo A. en dos angulos iguales; porque los triangulos OCB. OAB. tienen por la construccion los lados CB. y BO. iguales à AB. y BO. las bases AO. OC. son iguales: luego (c) los an-
(c) Prop. 8. gulos ABO. CBO. son iguales, que es, &c.

PROB. V. PROP. X.

Figur. 18. *Dada una linea recta terminada, partirla en dos partes iguales.*

Sobre la BC. que es la dada, formese (a) el triangulo equilatero BAC. dividase el angulo A. en dos partes (b) iguales con la AD. digo, que esta corta la BC. en dos partes iguales; porque por la construccion los triangulos negro, y blanco tienen los lados AC. AB. iguales, el AD. comun, y los angulos en A. iguales: luego las bases BD. DC. son (c) iguales: luego la linea BC. està cortada, &c.

(a) Prop. 1.
(b) Prop. 9.
(c) Prop. 4.

PROB. VI. PROP. XI.

Sobre una recta dada levantar una perpendicular.

Figur. 18.

Del punto D. dado, tomese BD. igual à DC. (a) y sobre la BC. formese el triangulo (b) equilatero BAC. y tirada la AD. esta es la perpendicular; porque los triangulos blanco, y negro tienen dos lados por la construccion iguales à dos lados, y las bases iguales: luego (c) los angulos D. iguales, luego (d) rectos, y la AD. perpendicular, que es.

(a) Prop. 3.
(b) Prop. 1.
(c) Prop. 8.
(d) Def. 10.

PROB. VII. PROP. XII.

Sobre una recta dada no terminada, y de un punto dado fuera de ella tirar una perpendicular.

Figur. 19.

Des-

Desde el punto A. dado como centro, describase un circulo, (a) que corte la dada en OR. y dividida por medio en E. (b) la EA. es la perpendicular: la demostracion es la misma que en la 11.

(a) Post. 3.
(b) P. 10.

THEOR. VI. PROP. XIII.

Quando una linea recta cayendo sobre otra recta, hace angulos, ò harà dos rectos, ò iguales à dos rectos.

Figur. 20. Digo, que los angulos R.S. que hace la DO. cayendo sobre la AB. ò son rectos, ò iguales à dos rectos; porque los dos R.S. tienen por medida el semicirculo, que es medida de dos rectos: luego, &c.

Nota, que pueden dos angulos ser iguales à dos rectos, sin que ninguno sea recto; porque si uno es, v. gr. de 100. *grados, y otro de* 80. *ninguno es recto; y hacen no obstante entre los dos* 180. *grados, que son dos rectos.*

THEOR. VII. PROP. XIV.

Si à una linea recta, y aun punto dado en ella se tiràn dos lineas rectas, no de la misma parte, haciendo los angulos de una, y otra parte igua-

iguales à dos rectos: haràn las dos una linea recta.

Por ser los angulos R. S. iguales à dos (a) rectos, y ACB. un semicirculo: luego ADB. es el diametro: luego (b) es una linea recta: que es, &c. Figur. 20. (a) Prop. 13. (b) Def. 16.

THEOR. VIII. PROP. XV.

Si dos rectas se cortan entre sì, haràn los angulos verticales iguales.

Cortense las lineas, como se vè en la figura: digo, que los angulos verticales, como A. C. son entre sì iguales; porque el A. y el negro son iguales al negro, y al C. por ser cada dos (a) iguales à dos rectos: quitese de ambas partes el negro, y queda (b) el A. igual al C. que es, &c. Figur. 21. (a) Prop. 13. (b) Axiom. 3.

Corolario.

Todos los angulos, que se puedan formar en un punto, son iguales à quatro rectos.

THEOR. IX. PROP. XVI.

En qualquier triangulo prolongado un lado, el angulo externo es mayor, que qualquiera de los internos opuestos.

THEOR. X. PROP. XVII.

De todo triangulo dos angulos de qualquier ſuerte que ſe tomen, ſon menores que dos rectos.

Eſtas dos propoſiciones ſe contienen en la 32. y antes no ſon meneſter.

THEOR. XI. PROP. XVIII.

En qualquier triangulo el lado mayor, ſe opone al mayor angulo.

El angulo C. opueſto al mayor lado AD. no es igual al angulo D. porque los lados AD. AC. (a) ſerian iguales: no es el angulo C. menor que D. porque ſi lo fuera ſe pudiera tirar dentro del angulo D. la recta DB. que hiciera en D. el angulo negro igual al C. en eſte caſo ſerian iguales BC. y BD. añadaſe à entrambas la BA. y ſeràn iguales ABC. y ABD. y ſiendo ABC. por la ſupoſicion menor que AD. ſerà tambien ABD. menor que AD. contra la definicion de la linea recta, que debe ſer la mas breve; luego el angulo C. ni es igual, ni menor que D. luego es mayor: que es, &c.

Figur. 22.

(a) Prop. 6.

THEOR. XII. PROP. XIX.

En qualquier triangulo el angulo mayor, ſe opone à mayor lado.

Conſ-

Consta evidentemente de la antecedente, porque si el lado mayor se opone al mayor angulo, el angulo mayor està en frente del mayor lado.

THEOR. XIII. PROP. XX.

Dos lados juntos de qualquier triangulo, son mayores que el tercero.

Consta de la definicion 4. de la linea recta.

THEOR. XIV. PROP. XXI.

Si sobre un lado de un triangulo, y de las extremidades de èl se tiran dos lineas rectas, que concurran en un punto dentro del triangulo, las tales lineas rectas seràn menores, que los otros lados del triangulo; pero el angulo, que comprehenden, serà mayor, que el contenido de las otras.

Digo, que los lados B.S. y SC. son menores, que los BA. y AC. porque en el triangulo negro los lados CD. y DS. son mayores, (a) que CS. añadase à ambas partes SB. y seràn CD. y DB. mayores, que CS. y SB. por la misma razon CD. y DB. son menores, què CA. y AB. luego BS. y SC. son mucho menores, que BA. y AC. Figur. 23. (a) Prop. 20.

Que el angulo S. sea mayor que A. se de-

demostrarà en la proposicion 32. y hasta entonces no es menester.

PROB. VIII. PROP. XXII.

Formar un triangulo de tres rectas iguales à tres dadas; pero es menester, que qualesquiera dos juntas sean mayores, que la tercera.

Figur. 24. De tres rectas iguales à las dadas A.C.D. se ha de formar un triangulo en la OB. larga à discrecion: tomese (a) OR. igual à A.RS. à C. y SB. à D. desde el punto R. con la distancia RO. y desde S. con la distancia SB. descrivanse (b) los semicirculos, que se cortaràn en E. tirense las RE. ES. digo, que està hecho; porque RO. que se hizo igual à A. es (c) igual à RE.SB. que se tomò igual à D. es igual à SE. RS. se cortò igual à C. luego, &c.

(a) Prop. 3.

(b) Post. 3.

(c) Def. 15.

PROB. IX. PROP. XXIII.

A una recta dada, y a un punto dado en ella hacer un angulo rectilineo igual a un angulo rectilineo dado.

Figur. 25. Al punto dado D. en la linea DE. se ha de hacer un angulo igual al A. Tirese la BC. y hagase el triangulo negro (a) de tres lineas iguales à las del blanco: digo, que el angulo D. es igual à A. porque los dos trian-

(a) Prop. 22.

triangulos negro, y blanco tienen dos lados iguales à dos lados, y la base BC. igual à la base ES. luego (b) el angulo A. igual al D. que es, &c. (b) Prop. 8.

THEOR. XV. Y XVI. PROP. XXIV. y XXV.

Si dos triangulos tienen dos lados iguales à dos lados, y desiguales los angulos comprehendidos de iguales lados, el que tuviere mayor angulo, tendrà mayor base; y el que mayor base, mayor el angulo à ella opuesto.

En los triangulos BAC. y BAG. sean iguales los lados AC. y AG. y el BA. es comun: sea el angulo BAG. mayor que el negro BAC. que es su parte: digo, que la base BG. es mayor que BC. tirese la CG. el triangulo CAG. por la suposicion, es isosceles: luego (a) los angulos negro, y blanco en G. son iguales al blanco en C. quitese al G. el negro, y añadase el negro à C. y quedaràn los dos en C. mayores, que solò el blanco en G. pero al angulo C. compuesto de los dos, se opone el lado BG. y al blanco en G. se opone el lado BC. luego este (b) es menor que BG. que es, &c. Figur. 26. (a) Prop. 5. (b) Prop. 19.

Digo lo segundo, que el angulo BAG. es

es mayor que el negro BAC. porque si fueran iguales, tuvieran (a) las bases iguales contra lo supuesto; si el BAG. fuera menor que el negro, la base BG. fuera (b) menor que la BC. pero se supone mayor: luego, &c.

(a) Prop. 4.

(b) Prop. 24.

THEOR. XVII. PROP. XXVI.

Si dos triangulos tienen dos angulos iguales à dos angulos, cada uno al suyo, y un lado igual à un lado, ò sea el adjacente à los tales angulos, ò opuesto à uno de ellos, tendràn iguales los demàs lados, y el tercer angulo al tercer angulo.

Se demostrarà mas commodamente despues de la 32. y antes no serà menester.

LAS PROPOSICIONES 27. Y 28. se demuestran mas commodamente despues de la 29.

THEOR. XX. PROP. XXIX.

Si una recta cae sobre dos rectas paralelas, harà los angulos alternos iguales: el externo igual à su interno opuesto, y de la misma parte, y los dos internos, y de la misma parte iguales à dos rectos.

Figur. 27. Digo lo primero, que en las paralelas AC.

AC. DG. los angulos alternos, como S. y O. son iguales; porque si no, sea mayor el S. y añadase à entrambas partes el T. y quedaràn los ST. mayores que O. y T. pero los S.T. son iguales (a) à dos rectos: luego los T.O. son menores, que dos rectos: luego (b) las AC. DG. no son paralelas contra lo supuesto.

(a) Prop. 13.

(b) Axiom. 10.

Digo lo segundo, que el externo B. es igual al interno E. porque el B. es (a) igual al angulo T. el T. (b) es igual al E. luego el E. es igual al B. que es, &c.

(a) Prop. 15.

(b) Primera parte de esta.

Digo lo tercero, que los dos angulos internos, como S.E. son iguales à dos rectos; porque si fueran menores, las AC. DG. no fueran (a) paralelas: si son mayores, que dos rectos, sus complementos à quatro rectos T.O. serian (b) menores, que dos rectos, lo que (a) no puede ser: luego, &c.

(a) Axiom. 10.

(b) Prop. 10.

Corolarios.

De aqui se sigue, que si dos lineas rectas hacen los angulos alternos, como CSO. R. iguales, las tales lineas seràn paralelas; porque si la CD. no es paralela à la EG. sealo la AB. y seràn (a) los angulos ASO. y R. iguales: pero el R. era igual al CSO. luego el CSO. y el ASO. seràn igua-

Figur. 81.

(a) Por la precedente.

(b)Axiom. 8. *iguales, la parte à su todo, que no puede (b) ser: luego. Esta es la proposicion 27.*

Figur. 27. *Siguese lo segundo, que si las rectas AC.DG. hacen el angulo externo B. igual al interno opuesto, y de la misma parte E. ò los dos internos, y de la misma parte TO. iguales à dos rectos: las tales rectas seràn paralelas, que es la proposicion 28. Porque si el angulo B. es igual al E. siendo el B. igual al* (a) *T. el T. serà igual el E. luego* (b) *las rectas son paralelas.*

(a) Prop. 15. (b) Prop. 27.

Lo tercero, si los angulos T. O. son iguales à dos rectos, son iguales à los E. O. que tambien son iguales (a) *à dos rectos: quitese de entrambas partes el O. y quedan los alternos E. T. iguales entre sì: luego las rectas* (b) *son paralelas: que es, &c.*

(a) Prop. 13. (b) Prop. 27.

THEOR. XXI. PROP. XXX.

Las rectas, que son paralelas à una misma, son paralelas entre sì.

Figur. 29. Digo, que las rectas BC. GH. paralelas à la OD. lo son tambien entre sì; porque el angulo S. es igual (a) al R. el A. tambien es (a) igual al R. luego el (c) A. es igual al S. y las BC. GH. (d) paralelas entre sì: ques es, &c.

(a) Prop. 29. (c) Axiom. 1. (d) Prop. 28.

PROB.

PROB. X. PROP. XXXI.

A una recta dada tirar una paralela por un punto dado fuera de ella.

Por el punto C. se ha de tirar una paralela à la AB. tirese la CR. tirese la DC. haciendo (a) el angulo S. igual al R. y alarguese hasta G. digo, que son paralelas; porque los angulos alternos SR. por la construccion son iguales: luego por la 27. &c.

Figur. 30.

(a) Prop. 23.

THEOR. XXII. PROP. XXXII.

De qualquier triangulo prolongado un lado, el angulo externo es igual à los dos internos opuestos juntos, y los tres angulos internos de qualquier triangulo, son iguales à dos rectos.

Tirada la RD. (a) paralela à CA. el angulo negro es igual (b) à su alterno A. el R. (b) à su interno C. luego el total ARO. es igual à los dos juntos A.C. que es, &c.

Figur. 31.
(a) Prop. 31.
(b) Prop. 29.

Digo lo segundo, que los tres angulos internos del triangulo CAS. son iguales à dos rectos; porque el angulo ARO. es igual à los dos (a) A.C. añadase el S. y seràn los tres A.C.S. iguales à los dos RS. y ARO. pero estos dos (b) son iguales à dos rectos: luego tambien los tres; que es, &c.

(a) Primera parte de esta.
(b) Prop. 13.

Corolarios.

De aqui ſe ſigue lo primero, que el angulo externo, es mayor que qualquiera de los internos opueſtos, que es la prop.16.

Segundo, que dos angulos de qualquier triangulo, ſon meñores que dos rectos, que es la prop.17.

Tercero, que en la figura 23. el angulo S. es mayor que el A. porque el S. es mayor que ſu interno D. y eſte mayor que A. luego S. mucho mayor que A. que es la ſegunda parte de la prop.21.

Quarto, tres angulos de qualquier triangulo, ſon iguales à los tres de qualquier otro.

Quinto, ſi un triangulo tiene un angulo recto, ò obtuſo, los otros dos ſon agudos.

Sexto, ſi dos triangulos tienen dos angulos iguales à dos angulos, cada uno al ſuyo: el tercero es igual al tercero.

Figur. 25. *Septimo, ſigueſe la demoſtracion de la propoſicion 26. porque los dos triangulos negro, y blanco, que ſe ſupone tener los angulos B. C. iguales à E. S. tienen tambien el A. igual* (a) *al D. y por ſer el lado BC. igual à ES. ſobrepueſto el uno al otro ſe ajuſtaràn; y por ſer todos los angulos iguales, el lado BA. caerà ſobre ED.*

(a) Corol. 6. de eſta.

y

y CA. sobre SD. y el punto A. en el punto D. porque si cae mas dentro, ò mas fuera del triangulo negro, serìa el angulo A. desigual (b) *al B. lo que no puede* (a) *ser: luego. La misma demostracion se hace, supuestos otros qualesquiera dos lados iguales.* (b) Segunda parte de la prop. 21.

Octavo, qualquiera figura rectilinea tiene tantos rectos, quantos son los lados de la figura duplicados, menos quatro. La siguiente Tabla muestra los rectos, que tiene cada figura regular, hasta el duodezagono, y los grados de cada angulo.

Figura.	*Rectos.*	*Grad. del ang.*
Triang.	2.	60.
Quadrado.	4.	90.
Pentagono.	6.	108.
Exagono.	8.	120.
Eptagono.	10.	128. 34.
Octagono.	12.	135.
Nonagono.	14.	140.
Dezagono.	16.	144.
Undezagono.	18.	147. 16.
Duodezagon.	20.	150.

THEOR. XXIII. Prop. XXXIII.

Figur. 32.

Lineas rectas, que juntan dos rectas iguales, y paralelas, y de las mismas partes son tambien iguales, y paralelas.

Digo, que las rectas DA. BC. que juntan à las iguales, y paralelas AC, DB. son iguales, porque son las distancias entre dos lineas equidistantes: (a) luego siendo iguales las distancias, las DA. y BC. que son essas distancias, son iguales. (a) Def. 31.

Digo, que son paralelas, porque sus distancias, que son las AC. y DB. se suponen iguales: luego las DA. y BC. son equidistintas, luego (a) paralelas: que es, &c.

THEOR. XXIV. PROP. XXXIV.

En los paralelogramos lados, y angulos opuestos, son iguales; y la diagonal corta el paralelogramo en dos partes iguales.

Figur. 32.

(a) Prop. 29.

(b) Prop. 26.

Porque en C. y D. los angulos alternos negros, y blancos (a) son iguales entre sì: luego los triangulos X.Z. tienen dos angulos iguales à dos angulos, cada uno al suyo, y el lado CD. adjacente comun: luego (b) los demàs lados son iguales à sus correspondientes, y el tercer angulo al tercer angulo; y todo el triangulo Z. al X. que es, &c.

PROP. XXXV. Y XXXVI. THEOR.

Los paralelogramos, que tienen una misma, ò iguales bases, y estàn entre las mismas paralelas, son entre sì iguales.

Figur. 33.

(a) Prop. 34.

(b) Axiom. 1.

Los paralelogramos AE. y SC. que tienen la base SE. y estàn entre unas mismas paralelas SR. AC. digo, que son iguales, porque las AD. y OC. son iguales (a) à SE. luego son (b) iguales entre sì; añadase à

en-

entrambas la DO. y quedan (c) AO. y DC. iguales: luego en los triangulos SAO. EDC. son iguales SA. ED. AO. DC. y la base SO. à la EC. luego (d) son totalmente iguales; quitese de entrambos el trianguli-co negro, y añadase el SGE. y quedan (e) iguales los paralelogramos AE. SC. que es, &c.

(c) Axiom. 2.
(d) Prop. 8.
(e) Axiom. 2. y 3.

Los AE. y OR. que tienen por suposicion iguales bases, y son iguales (a) al SC. lo son tambien (b) entre sì.

(a) Prop. 35.
(b) Axiom. 1.

PROP. XXXVII. Y XXXVIII. THEOR.

Triangulos, que tienen una misma, ò igual base, y estàn entre unas mismas paralelas, son entre sì iguales.

(a) Prop. 34
(b) Prop. 35. y 36.

Porque dichos triangulos son (a) mitades de paralelogramos (b) iguales: luego son iguales entre sì.

PROP. XXXIX. Y XL. THEOR.

Triangulos constituìdos sobre una misma, ò igual base, y àzia la misma parte, siendo iguales, estàn tambien entre unas mismas paralelas.

Figur. 24.

Los triangulos ABC. CEC. sean iguales: digo, que la recta AO. es paralela à la BC. porque si no, sealo otra, como AS. y se-

(a)Prop.37 seràn los triangulos (a) ABC. y BSC. iguales; pero el ABC. era igual al BOC. luego el BSC. y el BOC. son iguales la parte à su todo; lo que no puede (b) ser: luego la paralela no es otra, que AO. que es, &c.

(b)Axiom. 8.

La misma demostracion se hace, si se dice, que la paralela cae debaxo de AO. y la misma si los triangulos se supone tener iguales bases.

THEOR. XXXI. PROP. XLI.

Si un paralelogramo tiene la misma base, que un triangulo, y estàn entre las mismas paralelas, el paralelogramo serà duplo del triangulo.

Figur. 35.

Digo, que el triangulo RCS. que tiene la misma base RS. que el paralelogramo BR. y està entre las mismas paralelas, es mitad de dicho paralelogramo; porque los triangulos ARS. RCS. son (a) iguales: pero el ARS. es (b) la mitad del paralelogramo RB. luego tambien lo es el triangulo RCS. que es, &c.

(a)Prop.37

(b)Prop.34

Corolario.

De esta, y de la 35. y 36. se colige el area, ò espacio de los paralelogramos, y triangulos: la del paralelogramo se saca, multiplicando toda la base por toda la altura; y la del triangulo multiplicando la base por la mitad de la altura, *ò toda la altura por la mitad de la base. Como si un paralelogramo tiene 4. pies de base, y 6. de altura, su area serà 24. y un triangulo, que tenga la misma base, y altura, tendrà de area 12.*

PROB. XI. PROP. XLII.

Constituìr un paralelogramo igual à un triangulo dado en un angulo rectilineo dado.

Al triangulo EBS. se ha de hacer un paralelogramo igual, que tenga un angulo igual al A. Partase por medio (a) la base ES. en el punto R. tirese la BR. al punto R. hagase (b) el angulo SRC. igual al A. tirese (c) BD. paralela à ES. y SD. à RC. digo, que el paralelogramo RC. es el que se pide; porque los triangulos negro, y blanco son (d) iguales: luego el EBS. es duplo del blanco: de este mismo es duplo el paralelogramo RD. (e) luego el paralelogramo RD. y el triangulo EBS. son iguales: tambien se hizo el angulo en R. igual à A. luego: que es, &c.

Figur. 36.
(a) Prop. 10
(b) Prop. 23
(c) Prop. 31
(d) Prop. 38
(e) Prop. 41

THEOR. XXXII. PROP. XLIII.

De todo paralelogramo, los complementos de los paralelogramos circa diametrum, son iguales entre sì.

En el paralelogramo DE. digo, que los complementos CE. CD. son iguales; porque

Figur. 37.

que los triangulos RGE. RGD. y los B. A. y los S.O. ſon (a) iguales: luego quitando los iguales A. B.S.O. quedan (b) CE. y CD. iguales: que es, &c.

(a)Prop.34
(b)Axiom. 3

PROB. XII. PROP. XLIV.

Sobre una recta dada conſtituir un paralelogramo igual à un triangulo dado, en un angulo rectilineo dado.

Figur. 38.

Hagaſe el paralelogramo GB. en el angulo GDB. igual al L. y que ſea GB. (a) igual al triangulo M. de la GD. alargada, corteſe DH. (b) igual à la T. dada; y por H. tireſe HC. paralela (c) à DB. alargueſe AB. haſta C. tireſe el diametro haſta que concurra en O. con la AG. alargada: deſde O. tireſe la OS. paralela (ç) à GH. y alargueſe DB. haſta R. digo, que RH. es el paralelogramo, que ſe pide, porque es igual à ſu complemento (d) DA. que ſe hizo igual à M. tiene el lado DH. que ſe tomò igual à T. y el angulo negro, igual (e) al GDB. que ſe hizo igual al L. luego: que es, &c.

(a)Prop.42
(b)Prop.3.
(c)Prop.31
(d)Prop.43
(e)Prop.15

PROB. XIII. PROP. XLV.

Sobre una recta dada conſtituir un paralelogramo igual à una figura rectilinea dada, en un angulo rectilineo dado.

Figur. 39.

Reſuelto el rectilineo en triangulos, como mo en B. R. ſobre la SA. en un angulo S. igual à L. igual al triangulo R. hagaſe (a) el paralelogramo SD. y alargada à diſcrecion la SE. ſobre la ED. en el angulo E. igual à L. hagaſe el paralelogramo (a) EC. igual à B. digo, que el S.C. compueſto de los dos es, el que ſe pide; porque los SD. EC. eſtàn conſtituìdos ſobre la SA. ſon por la conſtruccion iguales al rectilineo BR. con los angulos S. E. iguales cada uno al L. pero los dos forman el total SC. porque los angulos S.E. por ſer iguales al L. lo ſon entre sì: añadaſe à entrambas partes el negro, y quedan el E. y el negro iguales al negro, y à S. pero eſtos dos (b) ſon iguales à dos rectos: luego tambien lo ſon el E. y el negro: luego SG. es (c) una recta, y tambien AC. todos los demàs lados por la conſtruccion ſon paralelos: luego: que es, &c. (a) Prop. 44 (b) Prop. 29 (c) Prop. 14

PROB. XIV. PROP. XLVI.

De una recta dada deſcrivir un quadrado.

Del punto C. de la CS. dada, levanteſe (a) la perpendicular CR. que ſea igual (b) à CS. del punto R. tireſe RA. paralela à CS. (c) y tambien (b) igual, y tireſe AS. (c) à GR. Digo, que CA. es quadrado; porque las CS. CR. RA. por la conſtruccion ſon Figur. 40. (a) Prop. 11 (b) Prop. 3. (c) Prop. 31

(d) Prop. 34. iguales, pero la SA. es (d) igual à CR. luego los quatro lados son iguales: el angulo C. es recto, pero con S. hace (e) dos rectos,
(e) Prop. 29. luego S. es recto: luego sus opuestos R. A. son tambien rectos, (d) luego es (f) qua-
(f) Defin. 26. drado: que es, &c.

Corolario.

Iguales lados dàn quadrados iguales, y quadrados iguales tienen iguales lados.

THEOR. XXXIII. PROP. XLVII.

En los triangulos rectangulos el quadrado, que se descrive del lado opuesto al angulo recto, es igual à los quadrados juntos, que se descriven de los lados, que comprehenden el angulo recto.

Figur. 41. Digo, que el quadrado BE. descripto del lado OB. que se opone al angulo recto A. es igual à los quadrados BC. OR. descriptos de los lados BA. OA. que comprehenden el angulo recto. Tirese por el pun-
(a) Prop. 31. to A. la recta AK. paralela (a) à BD. que cortarà las OB. ED. en los puntos L. K. tirense las SB. GO. AE. AD. y porque los angulos BAC. BAO. son por la suposicion
(b) Prop. 14. rectos: OA. AC. son una (b) recta; y porque los angulos GBA. DBO. son rectos, si à entrambos se añade el ABO. quedan el

GBO.

GBO. y el DBA. iguales: luego los triangulos ABD. y GBO. tienen los lados AB. y BD. iguales à los GB. y BO. y los angulos comprehendidos en B. iguales: luego las bases GO. y AD. iguales, (c) y todo el triangulo es igual à todo el triangulo; pero el GBO. es (d) la mitad del quadrado BC. y el ABD. del (d) paralelogramo DL. luego el quadrado BC. y el paralelogramo DL. son iguales. Del mismo modo se demuestra, que el paralelogramo EL. es igual al quadrado OR. luego el quadrado DO. es igual à los dos juntos BC. y OR. que es, &c. (c) Prop. 4. (d) Prop. 41.

THEOR. XXXIV. PROP. XLVIII.

Si el quadrado, que se describe de un lado de un triangulo, es igual à los quadrados juntos de los dos lados, el angulo contenido de dichos lados serà recto.

Es proposicion de poco uso: no obstante digo, que si el quadrado de la recta BC. es igual à los dos juntos de BA. y AC. el angulo A. es recto; porque si no lo es, ò serà obtuso, ò agudo, y en ninguno de los dos casos (contra lo que se supone) serà el quadrado de BC. igual à los de AB. y BC. como constarà en las prop. 12. y 13. del lib. 2. y antes no serà menester; luego el A. es recto: que es, &c. Figur. 42.

BRE-

BREVE MAPA DE LA DOCTRINA de los lados, angulos, y triangulos.

	Prop. 4.	Dos iguales à otros dos, y el ang. comprehendido igual..	los triangulos iguales.
Lados.	5.	Dos iguales en un triangulo...	dos ang. iguales.
	8.	Dos à otros dos, y tambien las bases iguales.............	Dan los triang. iguales.
	24.	Dos à otros dos iguales, y desigual el ang. comprehendido.	el mayor angulo mayor base.
	25.	Dos iguales à otros dos, y desiguales las bases...........	la mayor base mayor angulo.
	6.	Dos iguales en un triangulo..........................	dos lados iguales.
	26.	Dos iguales à otros dos, y un lado à un lado.............	Dàn los triangulos iguales.
Angulos.	15.	Verticales.....................	iguales.
	17.	Dos en un triangulo..........	men. q̃ dos rect.
		Tres en un triangulo.........	Son iguales à 2. rectos.
	29.	En paralelas alternos, y externos, y inter opuestos.......	iguales.
		Internos, y de la misma parte.	iguales à 2. rect.
	32.	Externo en un triangulo prolongado un lado..........	igual à los dos internos.
	19.	El mayor en qualquier triangulo..................	se opone al mayor lado.
Triangulos.	37.38.	Que tienen una misma, ò igual base, y estàn entre unas mismas paralelas.............	son iguales.
	39.40.	Iguales constituidos sobre una misma, ò igual base, y àzia la misma parte...........	estàn entre paralelas.
	41.	El que tiene la misma base, que un paralelogramo, y està entre las mismas paralelas.....	es mitad del paralelogramo.

LIBRO

LIBRO II.

DEFINICIONES.

ESTE Libro de qualquier modo que se explique, siempre es dificil à los principiantes. Nos valdrèmos del methodo mas breve, que esso tendrà à lo menos de menos trabajoso; y la explicacion en numeros ayudarà mucho à la inteligencia.

Todo paralelogramo rectangulo se dice estàr contenido de dos lineas rectas, que comprehenden el angulo recto.

Como el ABED. se dice estàr contenido de las AB.BD. ò de las AC. CD. porque determinadas estas, està determinada la magnitud del paralelogramo, por ser en èl los lados opuestos iguales. Figur. 1.

Por rectangulo se entiende un quadrilatero, cuyos angulos son todos rectos, de cuya especie son solamente el quadrado, y quadrilongo.

THEOR. I. PROP. I.

Si ay dos lineas rectas, y una de ellas se corta en qualesquiera partes, el rectangulo contenido de las dos rectas, es igual à los rectan-

tan-

tangulos contenidos de la entera, y de cada una de las partes de la cortada.

Figur. 2. Digo, que el rectangulo contenido de la O. y de la EG. dadas, es igual à los rectangulos de la O. y ES. O. y RG. al punto E. levantese la EA. perpendicular (a) à EG. y igual à O. (b) cumplase el rectangulo (c) ED. y por los puntos S.R. donde se corta la EG. tirense SB. RC. paralelas à EA. luego las SB. RC. GD. que son iguales (d) à la EA. son iguales (e) à la O. luego el rectangulo EB. està contenido de O. y ES. el SC. de O. y SR. el RD. de O. y RG. pero todos estos juntos son (g) iguales al ED. luego: que es, &c.

(a) Prop. 13. lib. 1.
(b) Prop. 3. lib. 1.
(c) Prop. 31. lib. 1.
(d) Prop. 34. lib. 1.
(e) Axiom. 1. lib. 1.
(g) Axiom. 8. lib. 1.

Nota. *Las proposiciones de este Libro, para mayor inteligencia, se explicaràn en numeros, teniendo presente, que el valor de un rectangulo se saca, multiplicando entre sì dos lados desiguales: el valor de un quadrado, multiplicando el numero dado por sì mismo.*

Figur. 2. *Sea, pues, DG.* 10. *pies: dividida en ES. que vale* 3. *SR.* 4. *RG.* 3. *y la linea O. valga* 4. *El rectangulo de O. y ES. esto es,* 4. *por* 3. *vale* 12. *El de O. y SR. vale* 16. *El de O. y RG.* 12. *que todos juntos hacen* 40 *y esto es tambien lo que vale el rectangulo de O. y EG. esto es* 4. *por* 10.

THEOR.

THEOR. II. PROP. II.

Si una recta se corta, como quiera, los rectangulos contenidos de la toda, y de cada una de sus partes, son iguales al quadrado de la toda.

Tomese la recta D. igual (a) à la AB. porque la AB. està dividida en C. serà el rectangulo comprehendido de la D. y de la AB. esto es, (por ser D. y AB. iguales) el quadrado de AB. (b) igual à los rectangulos de la D. esto es de la AB. y de cada uno de los segmentos AC. y CB. luego el quadrado de AB. es igual à los rectangulos de AB. y AC. AB. y BC. que es, &c.

Figur. 3.
(a) Prop. 3. lib. 1.
(b) Prop. 1. lib. 2.

En numeros. El rectangulo de AB. por AC. es 48. El de AB. por BC. es 16. que junto hace 64. Y el quadrado de BA. que se supone ser 8. vale 8. veces 8. esto es 64. luego, &c.

THEOR. III. PROP. III.

Si una recta se corta, como quiera, el rectangulo contenido de la toda, y de una de sus partes, es igual al rectangulo contenido de las partes, y al quadrado de la parte tomada, para formar el rectangulo.

Cortada la AB. como quiera en C. digo, que

Figur. 4.

que el rectangulo de AB. y AC. es igual al rectangulo de AC. y CB. y al quadrado de
(a) Prop. 3. lib. 1. AC. Tomeſe la D. igual (a) al ſegmento AC. porque la recta AB. eſtà dividida en C. ſerà el rectangulo de la D. eſto es de la AC.
(b) Prop. 1. lib. 2. y AB. igual (b) al rectangulo de la D. ò ſu igual AC. y CB. y al rectangulo de la D. y AC. que por ſer iguales, es el quadrado de la AC. que es, &c.

En numeros. Valga la AB. 7. dividida, como ſe vè, en 5. y 2. el rectangulo de las partes AC. por CB. eſto es, 5. por 2. que es 10. y el quadrado de AC. 5. por 5. que es 25. y todo junto 35. es igual al rectangulo de AB. por AC. eſto es, 5. por 7. que es 35.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si una recta ſe corta, como quiera, el quadrado de la toda, es igual à los quadrados de ſus partes, y à dos rectangulos contenidos de ſus partes.

Figur. 5. Porque la recta AB. eſtà dividida en C.
(a) Prop. 2. lib. 2. ſerà (a) el quadrado de la AB. igual à los rectangulos de la AB. y de los ſegmentos AC. CB. pero el rectangulo de AB. y AC.
(b) Prop. 3. lib. 2. es (b) igual al rectangulo de AC. y CB. y al quadrado de AC. Y el rectangulo de AB. BC.

BC. es igual al rectangulo de CB. y AC. con el quadrado de CB. luego el quadrado de la AB. es igual à los quadrados de BC. CA. y à dos rectangulos de BC. por CA. que es, &c.

En numeros. Valga la BA. 10. dividase en 3. y 7. el quadrado de 3. que es 9. el de 7. que es 49. y dos rectangulos de BC. por CA. esto es, 3. por 7. que cada uno es 21. y los dos 42. la suma de todos estos 9. 49. 42. que es 100. es igual al quadrado de AB. esto es, al quadrado de 10. que es 100.

Corolario.

Si la AB. està dividida por medio en C. el quadrado de BA. 100. es quadruplo del quadrado de la mitad, que es 25. porque la BC. en este caso serìa 5.

THEOR. V. PROP. V.

Si una recta se corta en partes iguales, y en desiguales, el rectangulo contenido de las partes desiguales de la toda, junto con el quadrado de la parte intermedia, es igual al quadrado de la mitad.

Cortada la AB. igualmente en C. y desigualmente en D. digo, que el rectangulo AD. DB. junto con el quadrado CD. es igual Figur. 6.

igual al quadrado de la mitad CB. Porque el quadrado de la CB. es (a) igual à los quadrados de CD. DB. con dos rectangulos de CD. por DB. y al rectangulo de DB. por CD. con el quadrado DB. es (b) igual el rectangulo de DB. por CB. serà el quadrado de la CB. igual al quadrado residuo de la CD. con el rectangulo de DB. por CD. y el de DB. por CB. ò AC. su igual; pero à los rectangulos de DB. por AC. y DB. por CD. es igual (c) el rectangulo de DB. y AD. luego el quadrado de la CB. es igual al quadrado de la CD. con el rectangulo de DB. y AD. que es, &c.

(a) Prop.4. lib.2.

(b) Prop.3. lib.2.

(c) Prop.1. lib.2.

En numeros: El rectangulo AD. por DB. esto es, 8. por 2. es 16. el quadrado de la intermedia CD. esto es, de 3. es 9. que junto con los 16. son 25. y esto es igual al quadrado de la mitad AC. ò 5. que es 25.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si una recta se corta en partes iguales, y se le añade directamente alguna linea recta, el rectangulo contenido de la toda con la añadida, y de la añadida, junto con el quadrado de la mitad, es igual al quadrado, que se forma de la mitad, y de la añadida, como de una

Cor-

Cortada la recta AB. por medio en C. y añadida directamente la BD. digo, que el rectangulo AD. y DB. junto con el quadrado de la BC. es igual al quadrado de CD. Porque (a) el quadrado de CD. es igual à los quadrados de CB. BD. con dos rectangulos de DB. por BC. esto es, con los rectangulos DB. y BC. y DB. por AC. porque AC. es igual à BC. pero à los rectangulos de DB. por AC. DB. por CB. y DB. por DB. esto es, el quadrado de DB. es igual (b) el rectangulo de DB. y AD. luego el quadrado de la CD. es igual al quadrado de CB. con el rectangulo de DB. por AD. que es, &c.

Figur. 7.

(a) Prop. 4. lib. 2.

(b) Prop. 1. lib. 2.

En numeros. El rectangulo AD. por DB. esto es, 10. por 2. que es 20. con el quadrado de BC. esto es, de 4. que es 16. junto todo, que es 36. digo, que es igual al quadrado de DC. esto es, de 6. que es 36.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si una recta se corta, como quiera, los dos quadrados, conviene à saber, el de la toda, y el de una de sus partes, son iguales à dos rectangulos contenidos de la toda, y de dicha parte, y al quadrado de la otra parte.

 Cor-

Figur. 8. Cortese la AB. como quiera, en C. digo, que los quadrados de AB. y de una de sus partes, como AC. son iguales à dos rectangulos de AB. y AC. y al quadrado de CB. Porque el quadrado de AB. (a) es igual à los quadrados de AC. CB. con dos rectangulos de AC. y CB. añadiendo el comun quadrado de AC. quedaràn los quadrados AB. AC. iguales al quadrado de BC. dos de AC. y dos rectangulos de AC. y CB. pero à un rectangulo de AC. y CB. con el quadrado de AC. es (b) igual el rectangulo de AB. y AC. luego à dos rectangulos de AC. y CB. con dos quadrados de AC. son iguales dos rectangulos de AB. y AC. luego los quadrados de AB. y AC. son iguales al quadrado residuo de CB. con dos rectangulos de AB. y C. que es, &c.

(a) Prop. 4. lib. 2.

(b) Prop. 3. lib. 2.

En numeros. Sea AB. 8. dividida en 3. y 5. el quadrado de la toda 64. con el quadrado de AC. 25. que toda es 89. es igual al quadrado de BC. que es 9. con dos rectangulos de 5. por 8. que hacen 80.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si una recta se corta, como quiera, el rectangulo quatro veces contenido de la toda, y de *de una de sus partes, con el quadrado de la otra parte, es igual al quadrado de la toda, y de dicha parte primeramente tomada, como de una.*

Cortese la AB. como quiera, en C. digo, que quatro rectangulos de AB. y CB. con el quadrado de AC. son iguales al quadrado de AB. y CB. como una. Alarguese la AB. haciendo (a) à BD. igual à BC. Porque el quadrado de la AD. es (b) igual à los quadrados de AB. BD. con dos rectangulos de AB. y DB. esto es, à los quadrados de AB. BC. con dos rectangulos de AB. y BC. pero los quadrados de AB. y BC. son (c) iguales à dos rectangulos de AB. y BC. con el quadrado de AC. luego el quadrado de AD. es igual à quatro rectangulos de AB. y BC. y al quadrado de AC. que es, &c.

Figur. 9.

(a) Prop. 3. lib. 1.

(b) Prop. 4. lib. 2.

(c) Prop. 7. lib. 2.

En numeros. Sea AB. 7. dividida en 5. y 2. quatro rectangulos de AB. por CB. esto es 7. por 5. que son 140. con el quadrado de CB. que es 4. y todo junto 144. es igual al quadrado de AD. que siendo 12. serà el quadrado 144.

THEOR. IX. PROP. IX.

Si una recta se corta igual, y desigualmente; los quadrados de las partes desiguales juntos, son

son el duplo de los quadrados, que se forman de la mitad, y de la parte intermedia.

Figur. 10. Cortese la AB. igualmente en C. y desigualmente en D. digo, que los quadrados AD. y DB. son el duplo de los AC. y CD. Porque el quadrado de AD. es igual à los quadrados de AC. (a) CD. y à dos rectangulos de AC. y CD. si se añade el quadrado comun de DB. seràn los dos quadrados AD. DB. iguales à los tres AC. CD. DB. con dos rectangulos de AC. y CD. ò de BC. y CD. pero al quadrado de DB. con dos rectangulos de BC. y CD. son (b) iguales los quadrados de BC. ò AC. y CD. luego los quadrados de AD. y DB. son iguales à dos veces los quadrados de AC. y CD. que es, &c.

(a) Prop. 4. lib. 2.

(b) Prop. 7. lib. 2.

En numeros. Sea AB. 10. dividida igualmente en 5. y 5. y desigualmente en 7. y 3. los quadrados de las partes desiguales son 49. 9. la suma 58. los de la mitad, y intermedia 25. 4. la suma 29. es mitad de 58.

THEOR. X. PROP. X.

Si una recta se corta en partes iguales, y se le añade directamente qualquiera otra recta: los dos quadrados, el que se forma de la toda con la añadida, como de una, y el de la añadida juntos, son el duplo de los quadrados juntos

que

que se forman el uno de la mitad, y el otro de la mitad, y de la añadida, como de una.

Cortese la AB. igualmente en C. y añadase directamente la BD. digo, que los quadrados de AD. y BD. son el duplo de los AC. y CD. Porque el quadrado de AD. es (a) igual à los quadrados AC. CD. con dos rectangulos de AC. ò BC. y CD. Si se añade el quadrado comun DB. seràn los dos quadrados AD. y DB. iguales à los tres AC. CD. DB. con dos rectangulos de BC. y CD. pero al quadrado de BD. con dos rectangulos de BC. y CD. son iguales (b) los quadrados de CD. y BC. ò su igual AC. luego los quadrados de AD. y DB. son iguales à dos veces los quadrados de AC. y CD. que es, &c.

Figur. 11.

(a) Prop. 4. lib. 2.

(b) Prop. 7. lib. 2.

En numeros. Sea la AB. 8. dividida igualmente en 4. y 4. y añadase DB. 2. el quadrado de AD. 10. es 100. el de BD. 2. es 4. la suma 104. es duplo de los quadrados, el uno CA. 4. que es 16. el otro CD. 6. que es 36. y juntos son 52.

PROB. I. PROP. XI.

Cortar una recta de tal suerte, que el rectangulo contenido de la toda, y de una de sus partes, sea igual al quadrado de la otra parte.

Sea

Figur. 12. Sea la AB. la que ſe ha de cortar del mo-
(a)Prop.46 lib.1. do dicho: ſobre ella (a) deſcrivaſe el quadrado AC. corteſe la AO. (b) por medio en
(b)Prop.10 lib.1. E. tireſe la EB. de la EA. alargada corteſe
(c) Prop.3. lib.1. (c) EF. igual à EB. y AR. igual à AF. por el punto R. tireſe RY. paralela (d) à FO. Digo,
(d)Prop.31 lib.1. que el rectangulo RC. contenido de RY. igual à AB. y de RB. es igual al quadrado AH. que lo es de la AR. y queda la AB. dividida en R. como ſe pide. Porque la recta OA. eſtà dividida en partes iguales en E. y
(e)Prop.6. lib.2. ſe añade directamente la AF. luego (e) el rectangulo de OF. y AF. junto con el quadrado de EA. es igual al quadrado EF. ò EB.
(g)Prop.47 lib.1. ſu igual: pero eſte es igual (g) à los de EA. y AB. luego el rectangulo de OF. y AF. ò FH. ſu igual, que es el rectangulo TY. junto con el quadrado de EA. es igual à los quadrados de EA. y AB. quiteſe de entrambas partes el de EA. y queda el rectangulo FY. igual al quadrado AB. quiteſe tambien el rectangulo AY. y quedan iguales el quadrado AH. y el rectangulo RC. que es, &c.

Eſte problema no ſe puede explicar en numeros, y las dos propoſiciones ſiguientes tampoco ſe explicaràn, por neceſsitarſe para ſu inteligencia el conocimiento de la raiz quadrada, que *no tienen aùn los principiantes, y ser la explicacion en numeros enredosa.*

THEOR. XI. PROP. XII.

En los triangulos amblygonios el quadrado del lado opuesto al angulo obtuso, es igual à los quadrados de los lados que comprehenden el angulo obtuso, y à dos rectangulos contenidos de uno de los lados, que forman el angulo obtuso, sobre el qual prolongado cae la perpendicular, y de la linea tomada fuera entre la perpendicular, y el angulo obtuso.

Digo, que el quadrado de RS. opuesto al angulo obtuso Q. es igual à los quadrados SQ. QR. y à dos rectangulos de SQ. y QT. Porque en el triangulo RTS. el quadrado RS. es (a) igual à los RT. y TS. pero el de TS. es igual (b) à los de TQ. QS. y à dos rectangulos de SQ. y QT. luego el quadrado RS. es igual à los quadrados RT. TQ. QS. y à dos rectangulos de SQ. y QT. en lugar de los quadrados RT. y TQ. substituyase el de RQ. que (a) es su igual: y queda el quadrado RS. igual à los RQ. QS. y à dos rectangulos de SQ. y TQ. que es, &c.

Figur. 13

(a) Prop. 47 lib. 1.

(a) Prop. 4 lib. 2.

THEOR. XII. PROP. XIII.

En los triangulos oxygonios, el quadrado del lado opuesto al angulo agudo con dos rectangulos contenidos de uno de los lados, que forman el angulo agudo, sobre quien cae la perpendicular, y de la linea tomada dentro, entre la perpendicular, y el angulo agudo, es igual à los quadrados de los lados, que comprehenden el angulo agudo.

Figur. 14.

Digo, que el quadrado de la AB. opuesta al angulo agudo C. con dos rectangulos de BC. y CD. es igual à los quadrados de AC. y CB. Porque la BC. està cortada, como quiera, en D. los quadrados de BC. y CD. son (a) iguales à dos rectangulos de BC. y CD. y al quadrado de BD. añade à entrambas partes el quadrado de la perpendicular AD. y seràn los tres quadrados de BC. CD. y AD. iguales à dos rectangulos de BC. y CD. y à los quadrados de BD. y AD. pero los quadrados de la CD. y AD. son iguales (b) al de la AC. luego los dos quadrados de BC. y AC. son iguales à dos rectangulos de BC. y CD. y à los quadrados de BD. y AD. en lugar de estos dos substituyase el de BA. que es (b) su igual: y quedan

(a) Prop. 7. lib. 2.

(a) Prop. 47 lib. 1.

dan los quadrados de BC. y AC. iguales à dos rectangulos de BC. y CD. y al quadrado de AB. que es, &c.

Scholio.

Aunque en esta proposicion habla Euclides de los triangulos oxygonios, lo mismo se verifica en los rectangulos, y amblygonios.

Corolario.

De esta, y de la passada se infiere la demostracion de la prop. 48. del lib. 1.

PROB. II. PROP. XIV.

Formar un quadrado igual à un rectilineo dado.

Al rectilineo A. dado, se ha de formar un quadrado igual. Hagase el paralelogramo rectangulo BD. igual (a) al rectilineo A. Si este rectangulo no es quadrado, alarguese DC. y hagase CF. igual (b) à BC. cortese CF. por medio (c) en G. desde G. con el semidiametro DG. descrivase el semicirculo DHF. alarguese BC. hasta H. y la linea CH. serà el lado del quadrado, que se pide. La demostracion, que aora fuera prolija, es muy facil en la prop. 17. del lib. 6.

Figur. 15.

(a) Prop. 45. lib. 1.

(b) Prop. 3. lib. 1.

(c) Prop. 10 lib. 1.

LIBRO III.

DEFINICIONES.

1 CIrculos iguales son, cuyos diametros, ò semidiametros son iguales.

2 Una linea, se dice tangente de un circulo, quando tocandole, alargada no le corta, como AB. si le corta, se dice secante.

Figur. 18.

3 Los circulos, se dicen tocarse, quando tocandose, no se cortan.

4 Las lineas rectas, se dicen distar igualmente del centro de un circulo, quando las perpendiculares, sobre ellas tiradas del centro, son iguales; y quando las perpendiculares son desiguales, aquella linea dista mas, cuya perpendicular es mayor.

5 Segmento del circulo es, una figura contenida de una linea recta, y una parte de la circunferencia, como AYC. DKF.

Figur. 14.

6 Angulo del segmento es, el que està comprehendido de una recta, y la circunferencia, como el angulo BYL.

Figur. 19.

7 Angulo en el segmento es, el contenido de dos rectas tiradas de qualquier pun-

punto de la circunferencia à las extremidades del ſegmento, como ABC. Figur. 13.

8 Sector de un circulo es, la figura comprehendida de una parte de la circunferencia, y de dos rectas, que tiradas de la circunferencia concurren en el centro, como DHF. Figur. 14.

9 Semejantes ſegmentos de circulo, ſon los que contienen iguales angulos, como los ABC. DEF. Figur. 14.

PROB. I. PROP. I.

Hallar el centro de un circulo dado. Figur. 1.

En el circulo dado ARC. tireſe la CR. como quiera, y corteſe (a) por medio en E. deſde E. tireſe EA. perpendicular (b) à CR. alargueſe haſta B. y corteſe por medio en H. Digo, que H. es el centro; porque eſtando en la BA. no puede ſer otro, que H. ſi eſtà el centro fuera de eſta linea; eſtè en otro punto, como O. y tirenſe las rectas OC. OE. OR. En los triangulos negro, y blanco, los lados RE. EO. ſon iguales à los CE. EO. y tambien (c) las baſes CO. RO. luego los angulos (d) en E. ſon iguales, y (e) rectos; pero el angulo AER. tambien es recto: luego AER. OER. ſon iguales entre sì: la

(a) Prop. 10 lib. 1.
(b) Prop. 11 lib. 1.
(e) Def. 15. lib. 1.
(b) Prop. 8. lib. 1.
(e) Def. 10. lib. 1.

par-

parte à ſu todo: luego O. no es centro: luego; que es, &c.

THEOR. I. PROP. II.

Si en la circunferencia de un circulo ſe toman dos puntos, la recta que los junta, cae dentro del circulo.

Figur. 1. Porque la linea SLA. que junta por fuera los puntos SA. entre eſtos dos puntos no es la mas breve diſtancia: luego (a) no es recta contra lo ſupueſto.

(a) Def. 4. lib. 1.

THEOR. II. PROP. III.

Si en un circulo una linea recta tirada por el centro corta por medio otra no tirada por el centro, harà con ella angulos rectos; y ſi hace angulos rectos, la corta por medio.

Figur. 2. A la RS. no tirada por el centro, corte por medio en O. la AO. tirada por el centro E. Digo, que los angulos en O. ſon rectos; porque los triangulos negro, y blanco, tienen dos lados iguales à dos lados, y las baſes (a) RE. ES. iguales: luego los angulos (b) en O. iguales, y rectos: luego, &c.

(a) Def. 15. lib. 1.
(b) Prop. 8. lib. 1.

Digo lo ſegundo, que ſi los angulos en O. ſon rectos, la RS. ſe corta por medio

en

en O. Porque en los triangulos negro, y blanco, los angulos en O. son iguales, y tambien (c) los R. S. el lado OE. comun: luego (d) los triangulos son totalmente iguales; y los lados RO. OS. que es, &c. (c) Prop. 5. lib. 1. (d) Prop. 26 lib. 1.

Corolario.

En un triangulo isosceles si una recta corta la base por medio, la corta en angulos rectos, y al contrario.

THEOR. III. PROP. IV.

Si en un circulo dos lineas rectas no tiradas por el centro se cortan entre sì, no se cortan mutuamente en dos partes iguales.

Porque si puede ser, las ST. y AO. no tiradas por el centro, cortense mutuamente por medio en C. y tomado (a) el centro R. baxese la RC. y porque corta à las dos por medio en C. seràn (b) los angulos RCO. RCT. rectos, y iguales: la parte à su todo: luego; que es, &c. Figur. 3. (a) Prop. 1. lib. 3. (b) Prop. 3. lib. 3.

THEOR. IV. PROP. V.

Si dos circulos se cortan entre sì, no tienen entrambos un mismo centro.

THEOR.

THEOR. V. PROP. VI.

Si dos circulos se tocan entre sì por dentro; no tendràn entrambos un mismo centro.

Fig. 4. y 5.
(b) Def. 15. lib. 1.

Porque tirados los comunes semidiametros, las RO. y RS. que son (a) iguales à la AR. serian iguales entre sì: la parte à su todo.

THEOR. VI. PROP. VII.

Si en el diametro de un circulo se toma un punto, que no sea el centro, y desde èl se tiran à la circunferencia algunas rectas.

Figur. 6.

Digo lo primero, que la mayor es en la que està el centro. En la recta AS. sea D. el centro, y tomese el punto R. distinto, tirense las RC. RB. RE. Digo, que RA. es mayor que RC. porque en el triangulo RDC. el lado (a) RC. es menor, que los dos RD. y DC. ò DA. su igual: luego es menor, que la RA. del mismo modo probarè, ser RA. mayor, que las demàs.

(a) Prop. 20. lib. 1.

Digo lo segundo, que RS. es la menor, de las que de R. se pueden tirar à la circunferencia: porque en el triangulo ERD. los dos lados ER. RD. son (a) mayores, que DE. ò DS. su igual; quitese de ambas partes RD. y queda RS. menor que RE. lo mismo se prueba respecto de las otras.

Di-

Digo lo tercero, que RC. es mayor que las RB. RE. porque en los triangulos RDC. RDB. los lados RD. y DC. son iguales à los RD. y DB. pero el angulo RDC. es mayor que el RDB. luego (b) la base RC. es mayor que RB. (b)Prop.24 lib.1.

Digo lo quarto, que del punto R. solo se pueden tirar dos rectas iguales: porque si puede aver mas, sean iguales las RH. RE. RO. y estas RE. RO. seràn iguales contra lo demostrado en la tercera parte de esta: luego: que es, &c.

THEOR. VII. PROP. VIII.

Si fuera de un circulo se toma un punto, y desde èl se tiran algunas rectas, que la una passe por el centro, y las demàs, como quiera.

Digo lo primero, que la AY. es la mayor, que es la que passa por el centro: porque tiradas las EO. ER. EG. EH. en el triangulo AEH. los lados (a) AE. EH. son mayores que el tercero AH. pero HE. y EY. son iguales: luego AE. y EY. son mayores que AH. assimismo se demuestra, que AY. es mayor que AG. Figur. 7. (a)Prop.20 lib.1.

Digo lo segundo, que AH. mas cercana al centro, es mayor que AG. porque en los

 trian-

triangulos HEA. GEA. los lados HE. y EA. ſon iguales à GE.EA. pero el angulo HEA. es mayor que el GEA. luego (b) la baſe AH. es mayor que AG.

(b)Prop.24 lib.1.

Digo lo tercero, que AC. es la menor de las que caen à la circunferençia convexa; porque en el triangulo AOE. la AE. es (a) menor que las EO. OA. quitenſe las iguales EO. EC. y queda AC. menor que AO.

(c)Prop.21 lib.1.

Digo lo quarto, que AQ. mas cercana à la minima, es menor que AR. porque en el triangulo ERA. los lados ER. RA. ſon (c) mayores que los EO. OA. en el triangulo EOA. quitenſe los iguales EO. ER. y queda OA. menor que RA.

Digo lo quinto, que del punto A. no pueden caer al circulo mas que dos rectas iguales: porque ſi pueden, dos de un miſmo lado, como AO. AR. ò como AG. AH. ſerìan iguales contra lo demoſtrado.

THEOR. VIII. PROP. IX.

Si de un punto tomado dentro de un circulo caen à la circunferencia mas que dos rectas iguales, el tal punto ſerà el centro.

Porque de un punto diſtinto del centro no pueden tirarſe à la circunferençia mas que

que dos rectas iguales, prop. 7. lib. 3. parte 4.

THEOR. IX. PROP. X.

Un circulo no puede cortar à otro circulo, en mas que dos puntos.

Porque si es possible, cortense los dos circulos en los puntos S.T.L.G. y del circulo CO. tomado (a) el centro R. tirense las RS. RT. RL. RG. que seràn entre sì iguales; y porque dentro del circulo AB. del punto R. salen mas que dos rectas iguales, (b) el punto R. serà su centro: tambien lo era del CO. luego dos circulos, que entre sì se cortan, tienen un mismo centro, lo que no puede ser. (c)

Figur. 8.

(a) Prop. 1. lib. 3.

(b) Prop. 9. lib. 3.

(c) Prop. 5. lib. 3.

PROP. XI. Y XII. THEOREMAS.

Si dos circulos por dentro, ò fuera se tocan, la recta, que junta sus centros, alargada passarà por el contacto.

Sirven para demostrar la 13. que se demostrarà mas brevemente sin ellas.

THEOR. XII. PROP. XIII.

Los circulos mutuamente entre sì, y con una recta, se tocan en solo un punto.

Consta claramente de la nocion de las

mismas lineas, que se comparan: porque ni una recta, y la peripheria curva del circulo, ò diversas curvaturas de desiguales peripherias, ò dos convexas, pueden entre sì convenir: pero convendrian en algun espacio, si en algunos puntos se tocassen: luego, &c.

La 14. se demuestra mas facilmente despues de la 15.

THEOR. XIV. PROP. XV.

En un circulo la mayor linea es el diametro; y de las otras la mas distante del centro es menor, que la menos distante.

Figur. 9.

Digo lo primero, que AD. que se supone ser el diametro, es mayor que qualquiera de las otras, como BC. porque en el triangulo BEC. el lado BC. es menor (a) que los otros dos juntos BE. EC. ò AE. ED. sus iguales: luego, &c.

(a) Prop. 20 lib. 1.

Digo lo segundo, que BC. es mayor que KL. porque en los triangulos BEC. KEL. los lados BE. y EC. son iguales à KE. y EL. pero el angulo BEC. es mayor que KEL. luego (b) el lado BC. es mayor que KL.

(b) Prop. 24 lib. 1.

Corolarios.

De aqui se sigue, que las rectas iguales distan tàn igualmente del centro: porque si no, con desigual distancia del centro, serian iguales contra lo demostrado.

Siguese lo segundo, que si distan igualmente del centro, son iguales, como RS. PQ. porque si no lo son, tirese otra (a) igual à PQ. y paralela, (c) que caerà, ò mas cerca del centro E. que RS. ò mas apartada: pero PQ. y RS. distan igualmente del centro: luego PQ. serà igual à otra, que diste desigualmente del centro contra lo demostrado. Esta es la prop. 14.

(a) Prop. 2. lib. 1.

(c) 31. Prop. lib. 1.

THEOR. XV. PROP. XVI.

La linea recta tirada de la extremidad del diametro, haciendo con el angulo rectos.

Digo lo primero, que caerà fuera del circulo, como AR. porque si no, cayga dentro, como AD. y del centro C. tirese la CD. luego en el triangulo isosceles ACD. los angulos (a) A. y D. son iguales: pero el CAD. se supone recto: luego CDA. tambien es recto: dos angulos en un triangulo iguales à dos rectos, lo que no (b) puede ser.

Figur. 10.

(a) Prop. 5. lib. 1.

(b) Prop. 17. lib. 1.

Digo lo segundo, que entre la AR. y la circunferencia no puede caer otra recta: porque cayga, si es possible la AS. tirésele del punto C. una (c) perpendicular COS.

(c Prop. 12. lib. 1.

y

(d)Prop.32 lib.1. y porque el angulo S. es recto, y mayor (d) que el CAS. luego el lado CA. opuesto al mayor angulo S. es (e) mayor que el CS. opuesto al menor angulo A. pero CO. es igual à CA. luego CO. es mayor que CS. la parte que su todo: luego, &c.

(e)Prop.19 lib.1.

Corolarios.

De aqui se sigue, que si por la extremidad del diametro se tira una perpendicular à èl, serà tangente del circulo.

Siguese lo segundo, que una recta, y un circulo solo se tocan en un punto.

Nota. *Que ningun angulo es quantidad, sino solo modo de la quantidad; y con esta doctrina se desatan varias dificultades, que nacen del angulo del contacto, singularmente comparado con los angulos rectilineos.*

PROB. II. PROP. XVII.

De un punto dado tirar una recta, que toque à un circulo dado.

Tiene facil resolucion por la 31. de este, y antes no serà menester.

THEOR. XVI. PROP. XVIII.

Si una recta toca un circulo, y del centro al con-

contacto, se tira una recta, esta serà perpendicular à la tangente.

Porque si la CA. no es perpendicular à AR. sealo otra como CL. y se probarà, que CE. es mayor que CL. como se probò, que CO. era mayor que CS. luego, &c. Figur. 10.

THEOR. XVII. PROP. XIX.

Si una recta toca un circulo, y del contacto se tira una perpendicular à la tangente, el centro del circulo està en la perpendicular.

Porque si el centro no està en la perpendicular AC. estè como en H. y serà el angulo (a) HAR. recto: pero el CAR. tambien se supone recto: luego los dos son iguales entre sì: la parte à su todo: luego, &c. Figur. 10.

(a) Prop. 18 lib. 3.

THEOR. XVIII. PROP. XX.

En un circulo el angulo formado en el centro, es duplo del que se forma en la circunferencia, quando tienen entrambos por base una misma circunferencia.

Digo, que el angulo BEC. formado en el centro E. es duplo del BAC. formado en la circunferencia, teniendo ambos por base la circunferencia BFC. Porque en el triangulo isosceles CEA. los angulos negros (a) en Figur. 11.

(a) Prop. 5. lib. 1.

en A. y C. ſon iguales: luego ambos juntos ſon el duplo del A. pero el externo CEF. es (b) igual à ambos juntos: luego es tambien duplo del negro en A. por la miſma razon el BEF. es duplo del blanco en A. luego el total BEC. es duplo del total BAC.

(b) Prop. 32 lib. 1.

Aſsimiſmo, por eſtàr el GEC. en el centro, es duplo del GDC. en la circunferencia: pero el GEB. es duplo del GDB. luego el reſiduo BEC. es duplo del reſiduo BDC. luego el angulo en el centro: que es, &c.

THEOR. XIX. PROP. XXI.

En un circulo los angulos, que eſtàn en un miſmo ſegmento, ſon iguales entre sì.

Figur. 11.

(a) Prop. 20 lib. 3.

Porque los angulos BAC. y BDC. que eſtàn en el miſmo ſegmento BADC. ſon (a) mitades del angulo BEC. luego ſon entre sì iguales: que es, &c.

THEOR. XX. PROP. XXII.

Los angulos opueſtos de las figuras quadrilateras, inſcriptas en un circulo, ſon iguales à dos rectos.

Figur. 12.

(a) Prop. 32 lib. 1.

(b) Prop. 21 lib. 3.

En el quadrilatero BACG. tiraràs las CA. BG. el angulo ABC. con los O. y X. hace (a) dos rectos: pero (b) el O. es igual al al Y. y el X. al Z. luego el ABC. con los dos Y. Z. esto es, con el total AGC. hace dos rectos: que es, &c.

PROP. XXIII.

Sobre una recta no se podràn constituìr dos segmentos de circulos semejantes, y desiguales, y àzia las mismas partes.

PROP. XXIV.

Semejantes segmentos de circulos constituìdos sobre iguales rectas, son iguales entre sì.

PROB. III. PROP. XXV.

Dado un segmento de circulo, describir el circulo, cuyo segmento es.

En el segmento dado ABC. tirense qualesquiera rectas, como AB. BC. cortense (a) por medio en los puntos D. E. tirense las (b) perpendiculares DR. ER. Digo, que el punto R. es el centro del circulo, que se pide: porque el centro està (c) en ambas perpendiculares: luego està en el comun concurso: luego: que es, &c.

Figur. 13. (a) Prop. 10 lib. 1. (b) Prop. 11 lib. 1. (c) Prop. 1. lib. 3.

THEOR. PROP. XXVI. Y XXVII.

En circulos iguales, iguales angulos insisten sobre iguales circunferencias, ò estèn formados en los centros, ò en las circunferencias: y si las cir-

circunferencias, sobre quienes insisten, son iguales, los angulos son iguales.

Figur. 14.

Sean iguales los angulos G. y H. en el centro, y B. y E. en la circunferencia de los dos circulos iguales. Digo, que las circunferencias AYC, DKF. son iguales: porque de los angulos formados en el centro, son medida las circunferencias sobre què insisten: luego iguales angulos en el centro de un mismo circulo, insisten sobre medidas, ò circunferencias iguales: pero para el caso, es lo mismo ser uno mismo, ò ser iguales los circulos, porque sobrepuestos se ajustaràn perfectamente: luego, &c.

(a) Prop. 20 lib. 3.

Lo mismo digo de los angulos en la circunferencia, que por ser (a) mitades de los angulos en el centro, tienen por medida la mitad de las circunferencias, sobre quienes insisten: luego siendo las mitades iguales, las duplas circunferencias lo seràn tambien.

Digo lo tercero, que si las circunstancias son iguales, los angulos, ò en el centro, ò en la circunferencia, que sobre ellas insisten; son iguales: porque ni los angulos en el centro, ni en la circunferencia pueden ser desiguales, midiendolos iguales circunferencias: luego: que es, &c.

THEOR.

THEOR. PROP. XXVIII. Y XXIX.

En circulos iguales, iguales rectas quitan iguales circunferencias, y à iguales circunferencias ſubtenden iguales rectas.

En los dos circulos iguales, ſean iguales las AC. DF. tirenſe à los centros las AG. GC. DH. HF. luego los triangulos AGC. y DHF. ſon equilateros entre ſi: luego (a) los angulos G. y H. ſon iguales: luego las circunferencias (b) AYC. DKF. ſon iguales; pero los circulos ſon iguales: luego los reſiduos ABC. y DEF. ſon tambien iguales.

Figur. 14.

(a) Prop. 8. lib. 1.

(b) Prop. 26. lib. 3.

Digo lo ſegundo, que ſi las circunferencias AYC. DKF. ſon iguales, lo ſon tambien las rectas AC. DF. porque ſiendo los arcos iguales, los angulos (c) G. y H. ſon iguales; pero los lados, que los comprehenden (d) ſon iguales: luego tambien lo ſon (e) las baſes AYC. DKF.

(c) Prop. 27. lib. 3.

(d) Def. 1. lib. 3.

(e) Prop. 4. lib. 1.

PROB. IV. PROP. XXX.

Cortar una circunferencia dada en dos partes iguales.

Sea el arco dado ABC. tireſe la recta AC. dividaſe (a) por medio en R. y levanteſe la (b) RB. perpendicular. Digo, que eſta corta

Figur. 15.

(a) Prop. 10. lib. 1.

(b) Prop. 11. lib. 1.

ta el arco por medio en B. porque tiradas las AB. BC. los triangulos X. Z. tienen los lados AR. RB. iguales à CR. RB. y los angulos en R. rectos: luego (c) las bases AB. BC. iguales, y las circunferencias (d) AB. BC. iguales: que es, &c.

c) Prop.4. lib.1.
(d)Prop.28 lib.3.

THEOR. XXVII. PROP. XXXI.

El angulo formado en el semicirculo, es recto; el formado en el mayor segmento, menor que un recto; y el formado en el menor segmento, es mayor que un recto.

Figur. 16.

Digo lo primero, que el angulo ABC. formado en el semicirculo, es recto: porque del centro D. tiradas las DA. DB. DC. en los triangulos isosceles ADB. CDB. los angulos A. y C. son iguales à los que se (a) forman en B. luego el B. es la mitad de los tres A. B. C. pero los tres (b) son iguales à dos rectos en el triangulo ABC. luego el B. es la mitad de dos rectos: luego es recto: que es, &c.

(a) Prop.5. lib.1.
(b)Prop.32 lib.1.

Digo lo segundo, que el formado en el mayor segmento, como ABC. es menor que un recto: porque el B. y el A. son (c) menores que dos rectos; pero el B. està demostrado recto: luego el A. es menor que un recto.

(c)Prop.17 lib.1.

Di-

Digo lo tercero, que el angulo E. formado en el menor ſegmento, es mayor que un recto: porque en el quadrilatero ABEC. los angulos (d) A. y E. ſon iguales à dos rectos; pero el A. eſtà demoſtrado menor que un recto: luego el E. es mayor que un recto: que es, &c. (d) Prop. 22. lib. 3.

Corolarios.

Siguese lo primero, que ſi un angulo de qualquier triangulo es igual à los otros dos juntos, ſerà recto.

Siguese lo ſegundo, el modo de tirar un tangente al circulo A. deſde un punto, como O. Del centro A. tireſe la recta AO. corteſe por medio (a) *en P. y con la diſtancia PO. deſcribaſe el ſemicirculo; y tirada la OB. ſerà tangente: porque tirada la AB. el angulo ABO. es* (b) *recto: luego la BO. es* (c) *tangente. Eſta es la prop. 17. de eſte.* Figur. 17. (a) Prop. 10. lib. 1. (b) Prop. 31. lib. 3. (c) Prop. 16. lib. 3.

THEOR. XXVIII. PROP. XXXII.

Si una recta toca à un circulo, y del contacto ſe tira qualquier recta que le corte, los angulos, que hace la tangente con la ſecante, ſon iguales à los que ſe forman en los ſegmentos alternos.

Sea la AB. tangente; y ſi la DC. paſſa por el centro, el angulo (a) ACD. es recto, igual Figur. 18. (a) Prop. 18 lib. 3.

al

al alterno, que se haria en el semicirculo, que es (b) tambien recto. Sea el angulo ACE. que no es recto, y tirese la DC. por el centro, y las DE. EG. GC. el angulo DEC. es (b) recto: luego los dos negros en el triangulo DEC. hacen un recto; pero el ACE. y el negro en C. hacen (c) un recto: luego son iguales à los dos negros. Quitese el comun negro en C. y queda el negro en D. igual al ACE. pero el negro en D. es (d) igual al F. luego el ACE. es igual F. que se forma en el segmento alterno. Tambien en el quadrilatero F. G. los angulos opuestos F. G. por ser (e) iguales à dos rectos, son iguales (o) à los ACE. ECB. pero el ACE. està demostrado igual à F. luego el residuo ECB. es igual al angulo G. que es, &c.

(b)Prop.31 lib.3.
(c)Prop.32 lib.1.
(d)Prop.21 lib.3.
(e)Prop.22 lib.3.
(o)Prop.13 lib.1.

PROB. V. PROP. XXXIII.

Sobre una recta descrivir un segmento de circulo, que reciba un angulo igual à un angulo rectilineo dado.

Si el angulo dado es recto, sobre la recta dada como diametro, descrivase un semicirculo, que serà capàz de un (a) angulo recto. Si es agudo como ABS. à la AB. tirese (b) la perpendicular BY. y al termino S. de

Figur. 19.
(a)Prop.31 lib.3.
(b)Prop.11 lib.1.

de la dada, hagase (c) al angulo SBC. igual el CSB. cuyo lado cortarà la BY. en C. del centro C. descrivase por B. el circulo, que passarà por S. por ser CB. y CS. (d) iguales, y cogerà el segmento BLS. un angulo igual al dado ABS. Porque la BA. es perpendicular al diametro, (e) serà tangente, y BS. secante: luego (h) el angulo en el segmento BLS. es igual al ABS.

(c) Prop. 23 lib. 1.

(d) 6. Prop. lib. 1.

(e) Prop. 16 lib. 3.

(h) Prop. 32 lib. 3.

Si el angulo dado es obtuso, como RBS. hecha la misma construccion, serà por la misma razon el segmento SGB. el que se pide.

PROB. VI. PROP. XXXIV.

De un circulo dado cortar un segmento, que reciba un angulo igual à un angulo rectilineo dado.

Del circulo dado en la figura, se ha de cortar un segmento, que reciba un angulo igual al dado O. tirese (a) la tangente AB. y hagase el angulo ABS. igual (b) al O. y serà (c) el segmento BLS. el que se pide.

Figur. 19.

(a) Prop. 16 lib. 3.

(b) Prop. 23 lib. 1.

(c) Prop. 32 lib. 3.

THEOR. XXIX. PROP. XXXV.

Si dos rectas se cortan entre sì dentro de un circulo, el rectangulo de los segmentos de la una es igual al de los segmentos de la otra.

Si

Figur. 20. Si ambas lineas passan por el centro, es claro: porque entonces los rectangulos seràn quadrados sobre iguales lineas: luego (a) seràn iguales.

(a)Prop.46 lib.1.

Lo segundo, passe la RO. por el centro, y corte en E. à la H. que no passa por el centro: tirese FG.(b) perpendicular à AC. y estarà cortada (c) en G. en partes iguales: y porque la AC. està cortada igualmente en G. y desigualmente en E. serà el rectangulo AEC. con el quadrado GE. igual (d) al quadrado GC. Añadase à entrambas partes el quadrado GF. y quedarà el rectangulo AEC. junto con los quadrados GE. y GF. ò con el quadrado FE. que es (e) igual à entrambos, quedarà igual à los quadrados CG. y GF. ò FC. que es (e) igual à los dos; ò FO. su igual: luego el rectangulo AEC. con el quadrado FE. es igual al quadrado FO. pero tambien el rectangulo REO. junto con el quadrado FE. es igual (d) al quadrado FO. luego el rectangulo AEC. con el quadrado FE. es igual al rectangulo REO. con el quadrado FE. quitese este comun quadrado FE. y quedan los rectangulos iguales.

(b)Prop.12 lib.1.
(c)Prop.3. lib.3.
(d)Prop.5. lib.2.
(e)Prop.47 lib.1.

Lo tercero, si ninguna passa por el centro, como AC. DB. demostrarè, como en la passada, que el rectangulo DEB. es igual al REO. pero este està demostrado igual al AEC. luego los rectangulos AEC. DEB. son iguales: que es, &c.

THEOR. XXX. PROP. XXXVI.

Si de un punto tomado fuera de un circulo caen à èl dos rectas, una secante, y otra tangente, el rectangulo contenido de toda la secante, y de la parte tomada entre el punto, y la circunferencia convexa, es igual al quadrado de la tangente.

Sea DA. secante, y DB. tangente: digo, que el rectangulo ADC. es igual al quadrado de la DB. Lo primero, la DA. passe por el centro E. y tirese la BE. y porque la AC. està cortada igualmente en E. y està añadida directamente la CD. serà el rectangulo (a) ADC. con el quadrado CE. ò BE. su igual: igual al quadrado de la ED. pero el quadrado ED. es (b) igual à los DB. y BE. por ser el angulo en B. (c) recto: luego los dos quadrados DB. y BE. son iguales al rectangulo ADC. con el quadrado BE. quitese este de ambas partes, y queda el rectangulo ADC. igual al quadrado DB. — Figur. 22.

(a) Prop. 6. lib. 2.
(b) Prop. 47. lib. 1.
(c) Prop. 18. lib. 3.

Lo segundo, la DA. no passe por el centro, — Figur. 21

(d)Prop.12 lib.1. tro, y del centro E. tirese (d) la perpendicular ER. que cortarà (e) la CA. por medio en
(e) Prop.3. lib.3. R. tirense las CE. DE. BE. El rectangulo
(g)Prop.6. lib.2. (g) ADC. con el quadrado RC. es igual al quadrado RD. añadase el quadrado comun RE. y quedarà el rectangulo ADC. con los
(h)Prop.47 lib.1. dos quadrados ER. y RC. ò su igual (h) el EC. ò su igual EB. igual à los dos quadrados RD. y ER. ò su igual (h) DE. luego el rectangulo ADC. con el quadrado EB. es igual al quadrado ED. pero el quadrado ED. es igual (h) à los dos DB. BE. luego el rectangulo ADC. con el quadrado EB. es igual à los dos quadrados DB. BE. quitese el BE. comun, y queda el rectangulo igual al quadrado DB. que es, &c.

Corolarios.

Siguese lo primero, que si de un punto tomado fuera del circulo se tiran dos, ò mas secantes, los rectangulos contenidos de las todas, y de las partes contenidas entre el punto, y la circunferencia convexa, son iguales entre sì, porque son iguales al quadrado de la tangente.

Segundo, que dos tangentes tiradas desde un punto son iguales: porque sus quadrados son iguales al dicho rectangulo de la secante.

Ter-

Tercero, que si el quadrado RA. es igual al rectangulo DAE. RA. es tangente: tirese la (a) tangente AC. y su quadrado serà (b) igual al rectangulo DAE. pero al mismo rectangulo se supone igual el quadrado AR. luego (c) AR. y AC. son iguales: luego los triangulos ARS. ACS. son equilateros entre sì: luego el angulo R. es igual (d) al C. pero el (e) C. es recto: luego el R. tambien: luego (h) RA. es tangente. Esta es la prop. 37. de esta.

Figur. 23.

(a) Prop. 17. lib. 3.
(b) Prop. 36. lib. 3.
(c) Prop. 46. lib. 1.
(d) Prop. 8. lib. 1.
(e) Prop. 18. lib. 3.
(h) Prop. 16. lib. 3.

LIBRO IV.

DEFINICIONES.

1 UNA figura rectilinea està inscripta en un circulo, ò el circulo circunscripto à la figura, quando todos los angulos tocan la circunferencia del circulo.

2 Una figura rectilinea està circunscripta al circulo, ò el circulo inscripto en la figura, quando todos los dados de la figura tocan la circunferencia del circulo.

3 Una recta està acomodada en un circulo, quando sus extremos tocan la circunferencia.

 Fi-

4 Figura regular es, la que es equilatera, y equiangula.

Este libro todo es problematico.

PROP. I.

Acomodar en un circulo una recta dada, que no sea mayor que el diametro.

Figur. 1.

En el circulo Y. tomese en la peripheria el punto B. desde èl con el intervalo de la recta dada A. describase un circulo, que concurra en C. y tirese la BC. que es (a) igual à la A. y està acomodada (b) en el circulo: que es, &c.

(a) Def. 15. lib. 1.
(b) Def. 3. lib. 3.

PROP. II.

Inscribir en un circulo un triangulo equiangulo à otro dado.

Figur. 2.

Sea el triangulo dado ABC. tirese la ER. que toque (a) al circulo en D. y hagase el angulo (b) EDG. igual al C. el RDH. al B. y tirese la GH. Digo, que el triangulo inscripto es equiangulo al dado; porque el angulo H. es igual al (c) EDG. esto es, al C. el G. al RDH. esto es, al B. luego el A. es (d) igual al D. que es, &c.

(a) Prop. 16 lib. 3.
(b) Prop. 23 lib. 1.
(c) Prop. 32 lib. 3.
(d) Prop. 32 lib. 1.

PROP. III.

Circunscribir à un circulo un triangulo equiangulo à otro dado.

Sea

Sea el triangulo dado YLK. y alarguese la YK. àzia una, y otra parte: hagase en el centro R. el angulo GRB. igual (a) al O. y el BRE. igual al N. por los puntos GBE. tirense (b) las tangentes DC. CA. AD. Digo, que el triangulo CDA. es equiangulo al dado, y està circunscripto al circulo; porque los quatro angulos del quadrilatero GR. CB. son (c) iguales à quatro rectos; pero los G.B. son (d) dos rectos: luego los C. R. valen dos rectos, y son iguales à los O. Y. que valen tambien (e) dos rectos: pero el R. se hizo igual al O. luego el C. es igual al residuo. Y asimismo se demuestra, que el angulo A. es igual al K. luego (h) el D. es igual al L. luego es equiangulo, y està (i) circunscripto al circulo: que es, &c.

Figur. 3.

(a) Prop. 23 lib. 1.

(b) Prop. 16 lib. 3.

(c) Corol. Prop. 32. lib. 1.

(d) Prop. 18 lib. 3.

(e) Prop. 13 lib. 1.

(h) Prop. 32 lib. 1.

(i) Def. 2. lib. 3.

PROP. IV.

En un triangulo dado inscribir un circulo.

Dividanse (a) por medio los angulos C. A. del triangulo dado con las rectas CR. AR. que concurren en el centro R. desde R. tirense (b) las perpendiculares RG. RB. RE. Digo, que el circulo descripto con la distancia RB. passa por los puntos G. y E. y està (d) inscripto en el triangulo; porque los

Figur. 3.

(a) Prop. 9. lib. 1.

(b) Prop. 12 lib. 1.

(d) Def. 2. lib. 3.

los triangulos GRC. BRC. tienen iguales los angulos en C. los G. B. rectos, y el lado CR. comun: luego (c) GR. es igual à BR. y lo mismo demostrarè de RE. luego: que es, &c.

(c) Prop. 26 lib. 1.

PROP. V.

A un triangulo dado circunscribir un circulo.

Figur. 4.

Cortense los lados AB. AC. del triangulo dado, (a) por medio en D. y E. tirense (b) las perpendiculares RD. RE. desde el punto donde concurren, descripto el circulo con la distancia RA. passarà por B. y C. y quedarà circunscripto (c) al triangulo; porque tiradas las RA. RB. RC. en los triangulos ADR. BDR. los lados AD. y DR. son iguales à los DB. y DR. y los angulos en D. rectos: luego (d) las bases RA. RB. son iguales: lo mismo se demuestra de la RC. luego: que es, &c.

(a) Prop. 10 lib. 1.
(b) Prop. 11 lib. 1.
(c) Def. 1. lib. 3.
(d) Prop. 4. lib. 1.

PROP. VI. Y VII.

En un circulo dado inscribir un quadrado, y circunscribir otro.

Figur. 5.

En el circulo dado tirense los diametros (a) perpendiculares en R. y las rectas, que juntan sus extremos AO. OE. EO. OA. hacen el quadrado inscripto; porque los quatro

(a) Prop. 11 lib. 1.

tro angulos en el centro son iguales, luego (b) las circunferencias tambien: luego tambien (c) son iguales las lineas, que las subtenden; pero los angulos A. C. E. O. en el semicirculo (e) son rectos; luego es quadrado.

(b) Prop. 26 lib. 3.
(c) Prop. 29 lib. 3.
(e) Prop. 31 lib. 3.

Tirense (d) las quatro tangentes, que concurren en los puntos S. B. D. G. Digo, que este quadrilatero està (h) circunscripto al circulo, y es quadrado; porque los angulos (i) SCR. ARO. BOR. son rectos: luego SD. (l) BG. AE. son paralelas, y tambien SB. y DG. CO. luego BD. es un paralelogramo; pero todos los lados (o) son iguales entre sì, por ser iguales al diametro, y todos los angulos rectos, por ser iguales à los del centro: luego es quadrado: que es, &c.

(d) Prop. 16 lib. 3.
(h) Def. 2. lib. 3.
(i) Prop. 18 lib. 3.
(l) Prop. 28 lib. 1.
(o) Prop. 34 lib. 1.

Scholio.

El quadrado de CO. ò SB. su igual, es duplo del quadrado inscripto, porque es igual (r) à los de CA. AO.

(r) Prop. 47 lib. 1.

PROP. VIII. Y IX.

Inscribir, y circunscribir un circulo à un quadrado dado.

Tirense los diametros, que se corten en A. del centro A. con la distancia AB. descripto el circulo passa por C. R. G. desde A. ti-

Figur. 6.

(a)Prop.12 lib.1. tirese AD. perpendicular à (a) BC. y el circulo descripto desde A. por D. tocarà todos los lados del quadrado. Pruebase la primera parte: porque los lados EB. GB. son iguales, seràn los angulos BCG. BGC. (b) iguales, pero el B. es recto: luego los dos (c) son semirectos; del mismo modo se demuestra, que los demàs son tambien semirectos, y iguales: luego en el triangulo BAC. siendo iguales ABC. y ACB. seràn (e) los lados AB. AC. iguales; y lo mismo se demuestra de AR. AG. luego el circulo, que desde A. passa por B. passa tambien por C. R. G.

(b) Prop.5. lib.1.

(c) Prop.32 lib.1.

(e) Prop.6. lib.1.

Pruebase la segunda parte: tiradas (a) las perpendiculares AY. AH. AE. en los triangulos BAE. BAD. los angulos en E. D. y tambien los en B. son iguales, y el lado AB. es comun: luego (d) EA. y AD. son iguales: lo mismo se demuestra de AY. y AH. luego el circulo passa por todos los lados, y los toca, (h) por ser los angulos en E. H. Y. D. rectos: que es, &c.

(d)Prop.26 lib.1.

(h)Prop.16 lib.3.

PROP. X.

Formar un triangulo isosceles, cuyos angulos sobre la base sean duplos del vertical.

Figur. 7. (a) Prop.11 lib.2.

Tomese qualquier recta AB. y cortese (a) de modo, que el rectangulo ABD. sea igual

igual al quadrado AD. desde A. por B. describase un circulo, y acomodese en èl (b) la BC. igual à la DA. y tirese la AC. Digo, que el triangulo CAB. es el que se pide: tirese la recta DC. y por CDA. describase (c) un circulo, porque el rectangulo ABD. es igual al quadrado AD. esto es, CB. luego (d) BC. es tangente del circulo O. y CD. secante: luego (e) el angulo BCD. es igual al A. y añadido el comun DCA. serà BCA. igual à los dos A. y DCA. pero porque los lados AB. y AC. son iguales, los angulos (h) sobre la base BC. son iguales: luego ABC. tambien es igual à los dos A. y DCA. pero el externo BDC. es (i) tambien igual à los dos: luego el B. y el CDB. son iguales: luego (m) las DC. y BC. son iguales, esto es, por la construccion CD. igual à DA. luego (n) los angulos A. y DCA. son iguales; pero el ABC. està demostrado igual à entrambos: luego es duplo de uno, como A. y lo mismo el C. luego: que es, &c.

(b) Prop. 1. lib. 4.

(c) Prop. 5. lib. 4.

(d) Prop. 37. lib. 3.

(e) Prop. 32. lib. 3.

(h) Prop. 5. lib. 1.

(i) Prop. 32. lib. 1.

(m) Prop. 6. lib. 1.

(n) Prop. 5. lib. 1.

Corolario.

Siguese, que el angulo vertical es la quinta parte de dos rectos, ò que divididos por 5. 180. grados, tiene el angulo vertical 36. que es una

par-

parte de las cinco, y cada angulo sobre la basi tiene 72.

PROP. XI.

En un circulo dado inscribir un pentagono regular.

Figur. 8.
(a) Prop.10 lib.4.
(b) Prop.2. lib.4.
(c) Prop.9. lib.1.

Descripto (a) el pentagono de la proposicion antecedente, inscribase (b) en el circulo uno equiangulo à èl, como ACD. cortense los angulos C. y D. (c) por medio con las RE. OB. y tirense las AE. ED. DC. CB. BA. Digo, que està inscripto el pentagono regular; porque los angulos R, S. N. O. G. por la construccion son iguales: luego sus arcos correspondientes son (e) iguales: luego las subtensas, (d) que son los lados del pentagono, son iguales: tambien es equiangulo, (h) porque sus angulos insisten en arcos iguales: luego: que es, &c.

(e) Prop.26 lib.3.
(d) Prop.29 lib.3.
(h) Prop.27 lib.3.

Corolario.

El angulo del pentagono es tres quintas partes de dos rectos, porque es igual à tres verticales, como G. ò vale 108. grados, que son las tres quintas.

PROP. XII.

Circunscribir à un circulo un pentagono regular.

Ins-

Inscribase en el circulo (a) un pentagono regular, y tirense las tangentes G. H. Y. K. M. que concurriràn en los puntos B. C. D. E. F. Digo, que el pentagono circunscripto al circulo, es regular: tirense del centro las AG. AB. AH. AE. AY. porque las BG. BH. (b) son iguales, los triangulos GAB. HAB. son equilateros entre sì: luego (c) el angulo O. es igual al Q. y el P. al S. y todo el B. es duplo de Q. y todo el GAH. duplo del S. por lo mismo el C. y HAY. son duplos del T. y N. pero los GAH. HAY. son (d) iguales: luego tambien sus mitades S. N. luego en los triangulos BAH. CAH. los dos angulos en A. y los (e) dos en H. son iguales, y el lado AH. es comun: luego (h) BH. y CH. son iguales, y tambien los angulos Q. T. del mismo modo se prueban iguales las rectas FG. GB. luego las CB. FB. que son duplas de iguales rectas, son entre sì iguales: lo mismo se demuestra de los otros lados: es tambien equiangulo, porque està demostrado, que los angulos B. C. son duplos de los iguales P. T. y lo mismo se dice de los demàs: luego: que es, &c.

Figur. 9.
(a) Prop. 11. lib. 4.
(b) Corol. Prop. 36. lib. 3.
(c) Prop. 8. lib. 1.
(d) Prop. 27. lib. 3.
(e) Prop. 18. lib. 3.
(h) Prop. 26. lib. 1.

PROP. XIII. Y XIV.

A un pentagono regular inscribir, y circunscribir un circulo.

Figur. 10.

(a) Prop. 9. lib. 1.

(b) Prop. 12 lib. 1.

Cortese (a) por medio los dos angulos del pentagono B. C. con las rectas BN. CS. que concurren en A. y tirese la (b) perpendicular AL. El circulo descripto desde A. por L. tocarà todos los lados del pentagono, y descripto desde A. por B. passarà por los puntos CD. E. F. Pruebase la primera parte: En los triangulos DCA. BCA. los lados DC. CA. son iguales à los BC. CA. item, los angulos P. O. luego (c) tambien los angulos G. Y. pero los B. D. se suponen iguales: luego siendo G. la mitad de B. tambien Y. es la mitad de D. luego D. tambien està cortado por medio con la recta DM. y por la misma causa todos los demàs angulos del pentagono. Tirense las perpendiculares AM. AS. AN. AR. porque en los triangulos LBA. MBA. los angulos G. y Q. y los lados LB. MB. son (d) iguales, y el BA. comun: luego (e) AL. y AM. son iguales, y lo mismo se demuestra de los demàs; y porque los angulos en L. M. S. N. R. son rectos, (e) tocarà (h) todos los lados del pentagono.

(c) Prop. 4. lib. 1.

(d) Corol. Prop. 36. lib. 3.

(e) Por la construccion.

(h) Prop. 16 lib. 3.

Prue-

Pruebase la segunda parte: En el triangulo CAB. porque los angulos O. G. estàn demostrados iguales, seràn (r) los lados CA. BA. iguales: lo mismo se demuestra de los demàs: luego el circulo, que passa por B. passa por C.E.D.F. que es, &c. (r) Prop. 6. lib. 1.

PROP. XV.

En un circulo dado inscribir un exagono regular.

En el circulo C. en que se ha de inscribir el exagono, tirese el diametro ED. y de D. por C. describase el circulo S.CB. tirense las rectas SCA. RCB. y las rectas, que las juntan, como AB. AE. &c. hacen el exagono regular; porque el triangulo SCD. es (a) equilatero: luego (b) es equiangulo: luego (c) el angulo SCD. es la tercera parte de dos rectos: tambien se demuestra, que el DCB. es otra tercera parte; pero estos dos con el BCA. hacen (d) dos rectos: luego el BCA. es otra tercera parte de dos rectos: luego los tres son iguales entre sì, y sus (e) verticales: luego todos los angulos en el centro C. son iguales: luego (h) tambien los arcos opuestos, y (r) las subtensas, que son los lados del exagono, como AB. AE. son tam-

Figur. 11.

(a) Def. 15. lib. 1.
(b) Prop. 5. lib. 1.
(c) Prop. 32 lib. 1.
(d) Prop. 13 lib. 1.
(e) Prop. 15 lib. 1.
(h) Prop. 26 lib. 3.
(r) Prop. 29 lib. 3.

tambien iguales: luego es equilatero; pero todos los angulos insisten en iguales arcos:

(f)Prop.27 lib.3. (f) luego es equiangulo: que es, &c.

PROP. XVI.

En un circulo dado inscribir una figura regular de quince lados.

Figur. 12. (a)Prop.11 lib.4. (b) Prop.2. lib.4. (c)Prop.30 lib.3.

Inscribase en el circulo R. dado el lado AC.(a) del pentagono, y el (b) AD.del triangulo equilatero, y cortado por (c) medio el arco en E. serà ED.el lado de la figura, que se pide: porque al lado del pentagono le corresponden tres de las quince, en que se ha de dividir el circulo: al lado del triangulo le tocan cinco: la diferencia entre 5. y 3. es 2. que cortada por medio, dà una parte de las quince, como ED. tambien serà la figura equiangula, porque todos sus angulos insistiràn en arcos iguales: luego: que es, &c.

Modo practico de inscribir en un circulo todos los polygonos regulares.

Figur. 13.

Tirese en el circulo dado el diametro CB. y dividase en tantas partes iguales, quantos son los lados del polygono, que se quiere inscribir: como en el exemplo presente, para inscribir un pentagono, se divide en cinco partes, con las

dis-

distancia AB. desde C. y B. haganse los arcos, que se cortan en O. y siempre por la segunda division, contada desde C. tirese la OAS. y la CS. serà el lado del pentagono.

Practica de describir qualquier polygono regular sobre una recta dada.

Sea dada la CB. y se pide un pentagono: desde B. con qualquier abertura hagase el arco RT. de tantos grados (a) *quantos tiene el semiangulo del pentagono: y desde C. describase el SO. igual al RT. tirense las rectas CO. BR. que, alargadas, se cortaràn en A. desde A. por B. describase un circulo, en cuya periphería se acomodarà cinco veces la CB. y quedarà descripto el pentagono sobre la recta dada.* Figur. 14.

(a) Tabla de los polygonos en la Prop. 32. lib. 1.

LIBRO V.

DEFINICIONES.

ESTE libro, con sus definiciones, es de suma importancia en las Mathematicas: por lo que debe procurar el principiante, hacerse cargo de èl perfectamente; y yo, atendiendo à su utilidad, me detendrè aùn mas en su explicacion, que en la demostracion de sus

sus Theoremas, que por ser quasi todos axiomas, la necessitan poco; y el prolijo methodo de Euclides causa gran confusion à los principiantes, demostrandoles por rodeos verdades por sì mismas bien manifiestas, supuesta la nocion de los terminos.

1 Parte es, una cantidad menor de otra mayor, quando la menor mide à la mayor.

Como 2. y 3. son partes de 24. porque 2. repetido 12. veces, y 3. repetido 8. veces, igualan al 24. esta se llama parte aliquota: à distincion de la parte aliquanta, que es aquella, que repetida algunas veces, no iguala à la mayor; sino que, ò no llega, ò la excede, como 3. respecto de 7. que repetido 2. veces, no llega; y repetido 3. veces, le excede: por lo que propriamente no es parte del 7. sino (como la llama Euclides) partes; esto es, 3. septimas.

A.24.
B.12.C.8.D.6

A.	D.
8.	6.
B.	C.
4.	3.

2 Multiplice es, una cantidad mayor respecto de su parte aliquota.

Como A. respecto de B. de C. de D. Equimultiplices son las cantidades, que igualmente incluyen à otras; y las incluidas se llaman semejantes partes aliquotas, como A. y D. son equimultiplices de B. y C. y B. y C. son semejantes partes aliquotas de A. y D.

3 Razon es, el respecto, ò relacion mutua, que tienen entre sì dos magnitudes, segun la cantidad sola, siendo ambas de un mismo genero.

Esto es, la linea con linea, superficie con su-

ſuperficie, ſolido con ſolido: en quanto la una es igual, mayor, ò menor que la otra.

4 Proporcion es, la ſemejanza de las razones.

La relacion que ay entre dos cantidades, ſe llama razon: la que ay entre dos razones, ſe llama proporcion: como ſer la cantidad A. dupla de B. ò contener A. à B. dos veces, es la razon que ay entre las dos cantidades A. B. pero ſer A. dupla de B. como C. lo es de D. es proporcion, porque es ſemejanza de dos razones; y las cantidades A. B. C. D. ſe llaman proporcionales.

A.8. B.4.
C.12. D.6.

La proporcion ſe divide en Geometrica, Arithmetica, y Harmonica. La Geometrica es, la que acabamos de definir. Arithmetica es, quando algunos numeros proceden con la miſma diferencia, como A. B. D. que ſe vàn excediendo en 3. Harmonica es, quando tres magnitudes, de modo, ſe ordenan, que ay la miſma razon de la primera à la tercera, que de la diferencia de la primera à la ſegunda, à la diferencia de la ſegunda à la tercera, como A. D C. pues como A. es la mitad de C. la diferencia de A. à D. que 1. es la mitad de la diferencia, que ay entre D. y C. que es 2.

A.4. B.7. D.10.

A.3. D.4. C.6.

Quando la razon de dos cantidades ſe puede explicar con numeros, como la que ay entre cantidades commenſurables, que ſon las que tienen una medida comun, ſe llama racional: quando no ſe puede explicar con numeros, como la que ay entre cantidades incommenſurables, que no tienen una medida comun, como el lado del quadrado, y su diagonal, se llama irracional.

En qualquier razon el primer termino, que se compara, se llama antecedente; y el segundo, à quien se compara, se llama consequente. Quando el antecedente, y consiguiente son iguales, la razon, que tienen, se llama de igualdad: quando el antecedente es mayor, se llama de mayor desigualdad: y quando el antedente es menor, de menor desigualdad.

La razon de mayor desigualdad es, de cinco maneras. Primera, multiplice, que es quando la mayor cantidad contiene cabalmente algunas veces à la menor: tomando el nombre de las veces, que la incluye; y assi se llama dupla, si la incluye dos veces: tripla, si tres: quadrupla, si quatro. Y la cantidad menor toma el mismo nombre con la particula sub; y assi se llama subdupla, si està incluida dos veces: subtripla, si tres: subquadrupla, si quatro.

Segunda razon: Superparticular es, quando la mayor cantidad contiene una vez à la menor, y una parte aliquota suya, que si es la mitad de la menor, se llama sesquialtera la mayor; si es una tercera parte, se llama la mayor sesquitercia; si una quarta parte, sesquiquarta: tomando el nombre de la parte aliquota, que incluye, de mas de la menor cantidad.

Tercera razon: Superpartiente es, quando la mayor cantidad contiene una vez à la menor, y algunas partes aliquotas suyas, que todas juntas no hacen una parte aliquota, como

9. respecto de 7. que se llama superbipartiente septimas; porque le incluye una vez, y dos septimas partes.

Quarta, multiplice superparticular es, quando la mayor contiene algunas veces à la menor, y una parte aliquota suya, como 10. à 4.

Quinta, multiplice superpartiente es, quando la mayor contiene algunas veces à la menor, y algunas partes aliquotas suyas, que todas juntas no hacen una parte aliquota, como 8. à 3.

De todos estos generos de razones, que suelen yà los Autores llamar proporciones, dà bastes exemplos la siguiente Tabla de las proporciones.

Def. del lib. 5.

5 Entre dos magnitudes se dice, que ay proporcion, quando la una algunas veces repetida, puede exceder à la otra, y al contrario.

Por esso no ay proporcion entre la linea, y la superficie: entre la superficie, y el cuerpo: entre lo finito, y lo infinito; pero la ay entre las cantidades incommensurables, porque el lado del quadrado, algunas veces repetido, puede exceder la diagonal.

6 En esta definicion explica Euclides, quando quatro cantidades son proporcionales, por los equimultiplices: definicion, que demàs de padecer algunas dificultades, es siempre obscura à los principiantes. En su lugar substituyo esta, que es mas clara, y comprehende tambien las cantidades irracionales.

Quatro cantidades eſtàn en la miſma proporcion, la primera à la ſegunda, y la tercera à la quarta, quando la primera del miſmo modo contiene, ò es contenida en la ſegunda: que la tercera contiene, ò es contenida en la quarta.

Eſto es; quando la primera es tanto mayor, ò menor, que la ſegunda, quanto la tercera es mayor, ò menor, que la quarta.

Hablando de la proporcion racional, ſe puede decir, que quatro cantidades eſtàn en la miſma proporcion, quando los antecedentes contienen à ſus conſiguientes las miſmas veces; ò las miſmas veces, y las miſmas partes aliquotas de ſus conſequentes: ò quando los antecedentes ſon las miſmas partes aliquotas de ſus conſequentes: ò quando eſtàn contenidos en ſus conſequentes las miſmas veces, y las miſmas partes aliquotas ſuyas: de todo ſe vèn exemplos en la ſiguiente Tabla.

A.	à B.	como C.	à D.	
8.	2.	12.	3.	E.
16.	6.	8.	3.	F.
5.	9.	10.	18.	G.
5.	15.	8.	24.	H.
4.	14.	6.	21.	R.
80.	40.	20	10.	S.

En E. A. es quadrupla de B. y C. lo es de D. en F. A. contiene à B. dos veces, y dos tercias partes, y C. à D. lo miſmo: en G. A. eſtà contenido en B. una vez, y mas quatro quintas partes, y del miſmo

mo-

modo C. està contenido en D. una vez, y ocho decimas partes, que es lo mismo que quatro quintas: en H. A. es subtriplo en B. y C. subtriplo de D. en R. A. està contenido tres veces y media en B. y C. tres veces y media en D.

Quando los terminos de tal modo son proporcionales, que es como el primero al segundo, el segundo al tercero; y como el segundo al tercero, el tercero al quarto, &c. como sucede en S. se llama proporcion continua: quando no sucede asi, como en E.F.G. se llama discreta.

7 En las cantidades, que no son proporcionales, el antecedente que contiene mas, ò mas veces, ò mas partes de su consequente, tiene mayor razon à èl, que otro antecedente, que contenga à su consequente menos, ò menos veces, ò menos partes de su consequente.

Como 8. tiene mayor razon à 2. que 6. à 3. 9. tiene mayor razon à 6. que 10. à 7.

8. La proporcionalidad no puede consistir en menos de tres terminos.

Porque entre dos terminos no ay mas que una proporcion, ò razon, y la proporcionalidad, por ser semejanza de dos proporciones, requiere à lo menos, que sea como el primer termino al segundo, assi el segundo al tercero.

9 Quando ay tres magnitudes continuas proporcionales, la primera à la tercera

ra tiene duplicada razon de la que tiene à la ſegunda; y quando ay quatro, la primera à la quarta tiene triplicada razon de la que tiene à la ſegunda: y aſsi en adelante, tomando el nombre del numero de los terminos que ay, menos uno.

Obſervefe, que no es lo miſmo proporcion duplicada, que dupla: (equivocacion, que padecen frequentemente los principiantes) Proporcion dupla es, quando una magnitud contiene, ò incluye à otra dos veces, como 12. à 6. 8. à 4. Porporcion duplicada es, quando la proporcion, que la primera tiene à la ſegunda, ſea la que fuere, ſea de igualdad, ò mayor, ò menor deſigualdad, la miſma interviene dos veces, reſpecto de la magnitud tercera: ſin que tener razon duplicada, ſea incluìrla dos veces: ni tenerla triplicada, ſea incluìrla tres veces, &c. Sean continuas proporcionales A. B. C. la A. à la C. tiene duplicada razon de la que tiene à la B. esto es, la razon de A. à B. interviene dos veces reſpecto de la C. porque interviene una vez reſpecto de A. à B. y otra vez reſpecto de B. à C. ſin que por eſto ſepamos, ſi la A. es mayor, ò menor que la C. ni quantas veces la A. incluya, ò eſtè incluìda en la C. ſi ſe explica en numeros la razon, que la primera tiene à la ſegunda, entonces ſe ſabe la razon, que la primera tiene à la ultima: porque ſiendo continuos proporcionales las cantidades, (como ſe ſupone) es preciſo, que procedan en la miſma proporcion.

En

A.	B.	C.	D.	E.	
2.	4.	8.	16.	32.	S.
	2.	2.	2.	2.	G.
243.	81.	27.	9.	3.	S.
	3.	3.	3.	3.	G.
10000.	1000.	100.	10.	1.	S.
	10.	10.	10	10.	G.
1.	4.	16.	64.	256.	S.
	4.	4.	4.	4.	G.

En la Tabla ſe vè, que el A. reſpecto de los terminos, con quienes tiene razon duplicada, triplicada, quadriplicada, yà es mayor, yà es menor, como ſe vè en las caſillas S. y aſſi miſmo ſe vè la sèrie de terminos continuos proporcionales, en quienes A. tiene razon duplicada reſpecto de C. triplicada à D. quadruplicada à E. En las caſillas G. eſtan unos numeros, que ſe llaman denominadores, ò exponentes de las proporciones; porque ſignifican, quantas veces el primer termino contiene, ò eſtà contenido en el ſegundo: como entre 2. y 4. eſtà el exponente 2. porque el 2. ſe contiene dos veces en el 4. entre 243. y 81. eſtà el exponente 3. porque el primero incluye 3. veces al ſegundo.

El

El modo de ſaber la razon, que el primero tiene al ultimo; v. gr. el A. à el E. es multiplicar continuamente entre sì los denominadores, y el numero que saliere explica la razon, que ay del primero al ultimo, yà en aumento, yà en diminucion: como ſi quiero ſaber la razon, que A. tiene à E. en la primer sèrie; porque los terminos proceden en razon dupla, ſu denominador es dos; y porque los terminos ſon 5. multiplicarè el 2. quatro veces, diciendo, 2. veces 2. ſon 4. dos veces 4. ſon 8. dos veces 8. ſon 16. y 16. veces eſtà contenido el A. en el E.

10 Magnitudes homologas, ſon los antecedentes con los antecedentes, y los conſequentes con los conſequentes.

11 Alternar, ò permutar es, quando el un antecedente ſe compara con el otro antecedente, y el un conſiguiente con el otro conſiguiente. Eſte modo de arguir pide, que todos quatro terminos ſean del miſmo modo.

12 Invertir es, comparar el conſequente, como antecedente, con ſu miſmo antecedente, en lugar de conſequente.

13 Componer es, comparar la ſuma del antecedente, y conſequente, al miſmo conſequente.

Obſervese, que eſta ſeñal ✠ ſignifica mas; y aſsi A. ✠ B. quiere decir A. mas B. ò A. con B. ò junto con B.

Di-

14 Dividir es, quando aquel excesso, con que el antecedente excede al consequente, se compara al mismo consequente.

Observese, que esta señal--- significa menos, ò que la cantidad, que và despues de la señal à la derecha, se ha de restar, y quitar de la que està antes de la señal. Asi A--- B. quiere decir: A menos B. ò A. quitada la B. ò quitado del valor de A. el valor de B. y quitado de A. 12. el valor de B. 8. queda en A. el valor de 4. con que el A. excede al B.

15 Convertir es, quando el antecedente se compara al excesso, con que el mismo antecedente sobrepuja al consequente.

Esto se hace asi: A. 9. A. 9.--- B. 6. que quiere decir, 9. à 9. menos 6. esto es, 9. à 3.

16 Arguir por igualdad de razon es, quando dadas mas que dos magnitudes, y otras en igual numero, que cada dos de entrambas partes tengan una misma razon, fuere como en las primeras magnitudes la primera à la ultima, asi en las segundas: ò es tomar los extremos terminos, dexando los medios.

Por igualdad de razon se puede arguir de dos modos: El primero es, proporcion ordenada, quando supuestas los dos ordenes de magnitudes, que vàn à la margen: fuere, como A. à B: D. à E. y como B. à C. asi E. à F. se infiere, ser A. à C. como D. à F.

A. B. C.
D. E. F.

A. B. C.
E. F.
D.

El segundo es, proporcion perturbada, y es quando supuestas las magnitudes; fuere A. à B. como E. à F. y como B. à otra tercera C. assi otra tercera D. à la primera E. y se arguye ser como la primera A. à la ultima C. assi D. a la ultima F.

Todos estos modos de arguir se prueban legitimos de los Theoremas de este libro, de todos ellos tiene exemplos la siguiente Tabla: advirtiendo, que estos quatro puntos : : son señal de la proporcionalidad: assi A. B : : C.D. es decir A. à B. como C. à D.

Arguir.	
Directamente.	A.9. B.3::C.12.D.4.
Alternar.	A.9. C.12:: B.3.D.4.
Invertir.	B.3. A.9::D.4.C.12.
Componer.	A.9.✠B 3.B.3::C.12.✠D.4.D.4.
Dividir.	A.9-B.3 B.3::C.12--D.4. D.4.
Convertir.	A.9.A.9--B.3::C.12.C.12--D.4.

THEOREMAS. PROP. I.

Dadas algunas magnitudes en qualquier numero, igualmente multiplices de otras tantas, cada una de cada una, como una magnitud fuere multiplice de una, assi todas lo seràn de todas.

PROP. II.

Si la primera magnitud es igualmente multiplice de la segunda, como la tercera de la quarta; y la quinta tambien igualmente multiplice de la segunda, como la sexta de la quar-

ta,

ta, serà la compuesta de la primera, y de la quinta, igualmente multiplice de la segunda, como la tercera, y sexta de la quarta.

PROP. III.

Si la primera magnitud es igualmente multiplice de la segunda, como la tercera de la quarta, y se toman otras igualmente multiplices de la primera, y de la tercera, seràn las tomadas igualmente multiplices cada una de la suya: la una de la segunda, y la otra de la quarta.

PROP. IV.

Si la primera magnitud à la segunda tiene la misma proporcion, que la tercera à la quarta, tambien las igualmente multiplices de la primera, y de la tercera à las igualmente multiplices de la segunda, y de la quarta, segun qualquiera multiplicacion, tendràn la proporcion misma.

PROP. V.

Si una magnitud es igualmente multiplice de otra, como la quitada de la quitada, tambien la residua serà igualmente multiplice de la residua, como la entera de la entera.

PROP. VI.

Si dos magnitudes son igualmente multiplices *tes de otras dos, y de las primeras se quitan algunas equimultiplices de las segundas: las residuas de las primeras, ò seràn iguales à las segundas, ò equimultiplices de ellas.*

Estas seis proposiciones son por la 7. que no necessita de ellas.

PROP. VII.

A.6. B.6. C.3.

Las cantidades iguales A. B. tienen la misma razon con la cantidad C. y C. tiene la misma razon con A. que con B.

Es Axioma.

PROP. VIII.

A.8. B.6. C.4.

Si las cantidades A. B. son desiguales, la mayor A. tiene à la tercera C. mayor razon, que la menor B. à la misma C. pero la C. tiene menor razon con la A. que con la B.

La primera parte consta de la definicion 7. de este: tambien C. incluye dos tercias partes de B. y de A. solo dos quartas: luego tiene mayor razon al B. que al A.

PROP. IX.

A.6. B.6. C.3.

Si las cantidades A. B. tienen la misma razon à la C. son iguales entre sì; y si la C. tiene la misma razon al A. que al B. tambien A. y B. se infiere ser iguales entre sì.

Es Axioma.

PROP.

PROP. X.

A.8. B.6.
C.4.

Si A. tiene mayor razon à C. que B. à la miſma C. es A. mayor que B. y ſi C. tiene mayor razon à B. que à A. es B. menor que A.

Conſta de la propoſicion 8.

PROP. XI.

A.6. C.3.
B.4. D.2.

E.10. G.5.

Las razones, que ſon iguales à otra razon, ſon iguales entre sì.

PROP. XII.

Si algunas cantidades A. C. B. D. fueren proporcionales, la miſma razon tiene el antecedente A. à ſu conſequente C. que la ſuma de los antecedentes E. à la ſuma de los conſequentes G.

Conſta por sì miſma en el exemplo propueſto.

PROP. XIII.

Si la primera magnitud à la ſegunda tiene la miſma razon, que la tercera à la quarta; y la tercera à la quarta tiene mayor razon, que la quinta à la ſexta: tambien la primera à la ſegunda tiene mayor razon, que la quinta à la ſexta.

PROP. XIV.

Si la primera magnitud à la ſegunda tiene la miſma proporcion, que la tercera à la quarta,

y

y la primera magnitud es mayor que la tercera; tambien la segunda es mayor que la quarta: si igual, igual; y si menor, menor.

PROP. XV.

B.4.	E.6.
C.4.	G.6.
D.4.	R.6.
L.12.	S.18.

Los equimultiplices tienen entre sì la misma razon, que las cantidades, de quien son equimultiplices.

Porque por la prop. 12. la suma de todos los antecedentes L. à la suma de todos los consequentes S. tiene la misma razon, que un antecedente B. à un consiguiente E. pero L. y S. son los equimultiplices de B. y E. luego, &c.

Corolario.

De aqui se infiere, que las partes aliquotas, semejantes de los todos, tienen entre sì la misma razon, que los todos, que son sus equimultiplices.

PROP. XVI.

A.8.	B.4.
C.6.	D.3.

Si quatro cantidades A. B. C. D. son proporcionales directamente, lo seràn tambien alternando A. à C.:: B. à D.

Por ser las quatro cantidades directamente proporcionales, seràn B. y D. semejantes partes de A. y C. luego por la antecedente, tendràn los todos A. C. la misma razon de sus partes semejantes B. D.

Scho-

Scholio.

Consta, que si es A. à B. como C. à D. serà tambien B. à A. como D. à C. que es la razon inversa.

PROP. XVII.

Si quatro cantidades A. B. C. D. son proporciones componiendo, lo seràn tambien divididas.

A ✠ B. B :: C ✠ D. D.
6. 3. 3. 4. 2. 2.

Porque dividir, no es mas, que de los antecedentes A. ✠ B: C. ✠ D: quitar semejantes partes aliquotas B. y D. luego quitando semejante parte de un antecedente, que de otro, quedaràn los residuos A. à B. como C. à D. que es ser proporcionales divididas.

Corolario.

De aqui se sigue la razon conversa, y que seràn A. A—B :: C. C—D. esto es, 8. à 8. menos 4. como 6. à 6. menos 3. porque de ambos consequentes se quitan semejantes partes aliquotas de sus antecedentes.

PROP. XVIII.

Si quatro cantidades son proporcionales divididas A. à B. como C. à D. tambien seràn proporcionales componiendo: A. ✠ B. B :: C. ✠ D. D.

A. 8. B. 4.
C. 6. D. 3.

Porque componer, no es otra cosa, que anaañadir à los antecedentes A. y C. ſemejantes partes aliquotas, que ſon B. y D. luego los nuevos antecedentes A.+B.C.+D. quedan proporcionales à ſus conſequentes B. y D.

PROP. XIX.

A.12. B.6. *Si de dos todos A. B. ſe reſtan dos cantida-*
C.8. D.4. *des C. D. que tengan entre sì la miſma razon,*
E.4. G.2. *que los todos: tambien los reſiduos E. G. tendràn la miſma razon, que los todos.*

Es como Axioma, y ſe vè manifieſtamente, que ſiendo 8. à 4:: 12. à 6: ſon tambien los reſiduos 4. à 2. como 12. à 6.

PROP. XX.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero en proporcion ordenada, que cada dos de entrambas partes tengan una miſma razon: ſi la primera es mayor, que la tercera, la quarta ſerà mayor, que la ſexta: ſi igual, igual; ſi menor, menor.

PROP. XXI.

Dadas tres magnitudes, y otras en igual numero, que cada dos de entrambas partes tengan una miſma razon, y eſtèn en la proporcion perturbada: ſi la primera es mayor, que la tercera, ſerà la quarta mayor, que la ſexta: ſi igual, igual; ſi menor, menor.

PROP.

PROP. XXII.

Si ay tres, ò mas magnitudes de una parte, como A. B. C. y otras tantas de otra, como D. E. G. y fuere A. à B. como D. à E. y B. à C. como E. à G. serà tambien A. à C. como D. à G. A.12.B.6.C.3 D.18.E.9.G.3

Consta claramente, porque las razones de A. à C. y de D. à G. se producen de razones semejantes, è iguales en numero. *Esta es la que se llama igualdad ordenada.*

Corolario.

Por la misma razon se infiere, que si es A. à B. como E. à G. y B. à C. como D. à E. serà tambien A. à C. como D. à G. que es la igualdad pertutbada, y es la prop. 23. A.12.B.6.C.3 D.8.E.4.G.2

PROP. XXIV.

Si la primera cantidad A. es à la segunda B. como la tercera C. à la quarta D. y una quinta E. fuere à la segunda B. como una sexta G. à la quarta D. la compuesta de la primera, y quinto A. ✠ E. serà à la segunda B. como la compuesta de la tercera, y sexta C. ✠ G. à la D. E.4. A.8. B.2. G.6. C.12. D.3.

Porque por la suposicion A. ✠ E. respecto de B. incluye igual numero de semejantes razones, que C. ✠ G. respecto de D. luego, &c.

PROP. XXV.

A. 16. B. 12. C. 4. D. 3. *En quatro cantidades proporcionales A. B. C. D. las maxima, y minima A. y D. son mayores, que las otras B. y C.*

Por suponerse D. la minima, serà menor que B. y seràn las semejantes partes aliquotas de D. menores, que las semejantes de B. porque las magnitudes mayores tienen las partes aliquotas mayores, que las semejantes de magnitudes menores: pero el excesso de A. sobre B. es una parte aliquota de B. y el excesso de C. sobre D. una semejante aliquota de D. luego mayor es el excesso de A. sobre B. que el de C. sobre D. pero si no huviera estos excessos, A. y D. serian iguales à C. y B. luego añadiendo el mayor excesso à A. y D. y el menor à B. y C. quedaràn estas dos menores, que A. y D.

Las diez proposiciones siguientes, aunque no son de Euclides; pero comunmente las citan los Geometras antiguos: por esso las pondrèmos aqui.

PROP. XXVI.

A. 8. B. 2. C. 6. D. 3. *Si la primera A. à la segunda B. tiene mayor razon, que la tercera C. à la quarta D. invirtiendo la D. à la C. tendrà mayor razon, que B. à A.*

Cons.

Consta de la prop. 8. porque por la suposicion D. estarà menos contenida en C. que B. en A.

PROP. XXVII.

Si la primera A. à la segunda B. tiene mayor razon, que la tercera D. à la quarta C. serà, alternando la razon de A. à D. mayor que la de B. à C.

S.4. A.8. B.24 D.6. C.3.

Sea S. à B. como D. à C. luego por la prop. 10. S. serà menor que A. porque A. se supone tener mayor razon à la B. que la S. à la misma B. luego siendo S. à B. como D. à C. alternando (a) serà S. à D. como B. à C. pero A. es mayor que S. luego la razon de A. à D. es mayor que la de B. à C.

(a) Prop. 16. lib. 5.

PROP. XXVIII.

Si la razon de A. à B. es mayor que la de D. à C. componiendo la de A. ✠ B. à B. serà mayor que la de D. ✠ C. à C.

S.4. A.8. B.24 D.6. C.3.

S. es à B. como D. à C. luego (prop. 18.) es S. ✠ B. à B. como D. ✠ C. à C. pero A. ✠ B. es mayor que S. ✠ B. luego A. ✠ B. tiene mayor razon à B. que S. ✠ B. con B. ò que D. ✠ C. con C.

PROP. XXIX.

Si la razon de A. ✠ B. à B. es mayor que la *de D.+C. à C. la de A. à B. es mayor que la de D. à C.*

Es la conversa de la antecedente, y de ella consta: porque quitando de A.+B. y D.+C. las B. y C. se quitan semejantes partes aliquotas: luego queda la A. con mayor razon à B. que la D. à la C.

PROP. XXX.

A.B.C.D. 8.2.6.3. *Si A.+B. à B. tiene mayor razon que C.+D. à D. la razon de C.+D. à C. es mayor que la de A.+B. à B.*

Es lo mismo que la 26.

PROP. XXXI. Y XXXII.

A.16.B.6.C.2 D.16.E.8.G.6 *Si tres cantidades estàn en mayor razon à otras tantas, puestas en el mismo, ò en diferente orden: la primera de las primeras à su ultima, tiene mayor razon, que la primera de las otras a su ultima.*

Porque la primera de las primeras à su ultima, tiene la razon compuesta de igual numero de mayores razones.

PROP. XXXIII.

A.12.B.3. C.6. D.2. *Si el todo A.+B. tiene mayor razon al todo C.+D. que la parte restada B. con la par-*

restada D. el residuo A, al residuo C. tiene mayor razon, que el todo al todo.

Porque alternando (27) avrà mayor razon de A. ✠ B. à B. que de C. ✠ D. à D. y convirtiendo (30) avrà menor razon de A. ✠ B. à A. que de C. ✠ D. à C. luego alternando avrà menor razon de A. ✠ B. à C. ✠ D. que de A. à C.

PROP. XXXIV.

Las razones duplicadas, triplicadas, &c. de razones iguales, son iguales entre sì.

Es Axioma, como la siguiente.

PROP. XXXV.

Si las razones duplicadas, ò triplicadas de otras razones son iguales, tambien lo seràn aquellas, de quien son duplicadas, ò triplicadas.

LIBRO VI.

DEFINICIONES.

1 SEmejantes figuras rectilineas son, las que tienen angulos correspondientes iguales, y proporcionales los lados, que comprehenden iguales angulos: *Como los triangulos ABC. DEF. se llaman semejantes,* Figur. 1.

tes, si el angulo A. es igual al D. el B. al E. y el C. al F. y si ademàs fuere, como AB. a BC. assi DE. a EF. y como BC. a CA. assi EF. a FD. y lo mismo se entiende de qualesquiera figuras rectilineas.

2 Figuras reciprocas son, quando en entrambas se hallan los antecedentes, y consequentes por terminos de las proporcionales: *O quando en una figura se toma el primer antecedente, y el segundo consequente, y en la otra el primer consequente, y el segundo antecedente, como los paralelogramos AC. y EG. se llaman reciprocos, si cerca de los mismos angulos fuere AB. a EF. como FG. a BC. o como AB. a FG. assi EF. a BC.*

Figur. 13.

3 Una recta està divida segun la extrema, y media razon, quando toda la linea al mayor segmento tiene la misma razon, que este al menor.

4 Altura de qualquier figura, es la perpendicular, tirada desde el vertice a la base.

Figur. 1.

Como la perpendicular AD. es la altura del triangulo BAC: y la EH. aunque cae fuera del triangulo, es la altura del triangulo ERG.

5 Razon compuesta de otras razones, es la que producen las cantidades de al-

gu-

gunas razones multiplicadas entre sì.

Estoes: la que producen los denominadores, ò exponentes de las razones, multiplicados entre sì. Quando se saben las cantidades de los exponentes, se sabe la razon, que la primera tiene à la ultima: poniendo los exponentes a modo de quebrados, como se vè en el exemplo siguiente: y multiplicando continuamente los numeradores, y tambien los denominadores, y se producirà otro quebrado, que expressarà la razon de la primera a la ultima; v. gr. 3. 5. 8. 9. la razon de 3. a 9. es compuesta de las razones de 3. a 5. de 5. a 8. de 8. a 9. Formese el quebrado A. como se vè, y hecha la continua multiplicacion de numeradores, y denominadores, resulta el quebrado B. cuya razon es la misma, que la de 3. a 9.

A.	B.
$\frac{3.5.8.}{5.8.9.}$	$\frac{120.}{360.}$

Notese, que la razon compuesta, no es igual a las razones de que se compone: como 2. 4. 16. el primero es suboctuplo del tercero; y esta razon es compuesta de 2. a 4. que es subdupla, y de 4. a 16. que es subquadrupla, si no es quando por accidente la adicion, y multiplicacion producen una razon misma, que es rara vez: como en estas cantidades 2. 4. 8. cuyos exponentes son 2. 2. que multiplicados, producen lo mismo, que sumados.

THEOR.

THEOR. I. PROP. I.

Triangulos, y paralelogramos de vna misma, ò igual altura, tienen entre sì la misma proporcion, que las bases.

Figur. 2. Digo, que los triangulos BAR. SED. que tienen la misma altura, tienen entre sì la razon, que la base BR. à la base SD. sea la base BR. dupla de SD. y cortese (a) por medio en C. y seràn iguales las tres, BC. CR. SD. sea AE. paralela (b) à BD. y seràn los triangulos BAC. CAR. SED. (c) iguales: luego el triangulo BAR. incluye dos veces al SED. como la base BR. à la SD. luego (d) el triangulo al triangulo tiene la misma razon, que la base à la base.

(a)Prop.10 lib.1.

(b)Prop.31 lib.1.

(c)Prop.38 lib.1.

(d) Def.6. lib.5.

En numeros se vè claramente: sea la base BR. 4. pies, y la SD. 2. valdrà (e) el triangulo BAR. 8. y el SED. 4. que es la razon de la base 4. à la base 2.

(e)Prop.41 lib.1.

Tambien por ser (e) los paralelogramos duplos de los triangulos, que tienen la misma base, y altura, tendràn (r) la misma razon, que los triangulos: estos en igual altura tienen la misma razon, que las bases: luego tambien los paralelogramos.

(r)Prop.15 lib.5.

Corolario.

Triangulos, ò paralelogramos de una misma, ò igual base, tienen la misma razon de sus alturas.

THEOR. II. PROP. II.

En qualquier triangulo la paralela a un lado, corta proporcionalmente los otros dos; y la recta, que corta proporcionalmente dos lados de un triangulo, es paralela al tercero.

En el triangulo ARS. al lado RS. tirada la paralela DC. Digo, que quedan proporcionales, como AD. à DR. asi AC. à CS. porque tiradas las RC. DS. los triangulos DCS. CDR. son (a) iguales: luego (b) el triangulo ADC. tiene la misma proporcion al uno, que al otro; pero el ADC. al CDS. tiene (c) la proporcion, que la base AC. à CS. y el mismo ACD. al DCR. tiene la proporcion, que la base AD. à DR. luego (d) es como AD. à DR. asi AC. à CS. que es, &c.

Figur. 31.

(a) Prop. 37. lib. 1.

(b) Prop. 7. lib. 5.

(c) Prop. 1. lib. 6.

(d) Prop. 11. lib. 5.

Lo segundo, sea AD. à DR. como AC. à CS. Digo, que DC. es paralela à RS. porque como AC. à CS. asi el triangulo ADC. al CDS: y como AD. à DR. asi el triangulo ACD. al DCR. luego el ADC. tiene la misma proporcion à los dos: luego (e) estos son

(e) Prop. 9. lib. 5.

son iguales, y tienen la misma base DE.
(r)Prop.39 lib.1. luego (r) DC. es paralela al tercero: que es, &c.

THEOR. III. PROP. III.

En qualquier triangulo la linea, que divide un angulo en dos mitades, corta la base en dos segmentos proporcionales à los otros dos lados; y la recta, que corta la base en dos segmentos proporcionales à los otros dos lados, divide el angulo en dos mitades.

Figur. 4. En el triangulo ACD. corte la recta BC. el angulo ACD. en dos partes iguales. Digo que es, como AC. à CD: assi AB. à BD; (a)Prop.31 lib.1. tirese (a) AR. paralela à BC. y alarguese DC. hasta que concurran las dos en R. luego (b) (b)Prop.29 lib.1. el angulo negro en C. es igual à su interno R. y el blanco en C. igual à su alterno el blanco en A. pero los dos angulos en C. se suponen iguales: luego el R. y el blanco en A. tambien son iguales: luego las lineas (c) (c)Prop.6. lib.1. AC. y CR. son iguales, y tienen la misma proporcion à la CD. pero la RC. à la CD. (d)Prop.2. lib.6. en el triangulo ARD. es (d) como AB. à BD. (e)Prop.11 lib.5. luego AC. à CD. es (e) como AB. à BD. que es, &c.

Esto supuesto, digo, que la BC. corta el angulo C. por medio: porque por ser cada

una

una de las AC. RC. à la CD. como AB. à BD. las AC. y RC. (r) seràn iguales; y los angulos R. y el blanco en A. tambien iguales: pero el R. es igual al negro en C. y el angulo blanco A. igual al blanco C. luego los dos en C. son iguales: que es, &c.

(r) Prop. 11 lib. 5.

THEOR. IV. PROP. IV.

Los triangulos entre sì equiangulos, tienen proporcionales los lados que comprehenden iguales angulos.

En los triangulos Z. X. sea el angulo ABC. igual al F. el A. al Y. y el C. al L. Digo, que los lados son proporcionales: AB. à BC:: LF. à FY: BA. à AC:: FY. à YL: AC. à CB:: YL. à LF. Porque si el angulo F. se pone sobre su igual B. los lados FY. FL. caen sobre los lados BA. AC: y porque el angulo Y. se supone igual al A. seràn (a) YL. AC. paralelas: luego (b) serà AY. à YB. como CL. à LB. y componiendo AB. à YF. (c) como CB. à LF. y si el angulo Y. se pone sobre su igual A. y el L. sobre el C. hecha la misma demostracion, se prueban proporcionales los demàs lados que comprehenden iguales angulos: que es, &c.

Figur. 5.

(a) Prop. 28 lib. 1.

(b) Prop. 2. lib. 6.

(c) Prop. 18 lib. 5.

Corolarios.

Figur. 5.

De aqui se sigue, que si en un triangulo, como ABC. à qualquier lado, como AC. se tira una paralela TL. que esta corta el triangulo TBL. semejante al ABC. porque (a) *son equiangulos, luego* (b) *semejantes.*

(a) Prop. 29 lib. 1.

(b) Prop. 4. lib. 6.

Figur. 5.

Siguese lo segundo, que en la misma suposicion tirada la BR. es AR. à RC:: TX. à XL. porque està demostrado, que AR: es à RB. como TX. à XB; RB. à RC. como XB. à XL. luego (c) *AR. à RC. como TX. à XL.*

(c) Prop. 22 lib. 5.

THEOR. V. PROP. V.

Si dos triangulos tienen lados proporcionales, son equiangulos.

Figur. 6.

En los triangulos X. Z. sea AB. à AC. como DE. à ER. y BC. à CA. como ER. à RD. y CA. à AB. como RD. à DE. Digo, que son equiangulos; y el angulo A. igual al D: el B. al blanco E. y el C. al blanco R. Al angulo B. hagase igual el negro en E. al C. el negro (a) R. y serà (b) el G. igual al A. luego los triangulos ABC. y GER. son equiangulos; y serà (c) AB. a BC. ò DE. a ER. (f) como GE. a ER. luego (d) DE. y GE. son iguales: asimismo es BC. a CA. ò ER. a RD. como ER. a RG. luego (d) DR. y RG. son

(a) Prop. 23 lib. 1.

(b) Prop. 32 lib. 1.

(c) Prop. 4. lib. 6.

(d) Prop. 9. lib. 5.

(e) Prop. 8. lib. 1.

(f) Por la suposicion.

 igua-

iguales: luego los triangulos X. S. tienen dos lados iguales a dos lados, y el ER. comun: luego (e) son entre sì equiangulos; y el blanco E. es igual al negro E. ò a su igual B. el blanco R. igual al negro R. ò a su igual C. y el tercero D. (b) al A. que es, &c.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si dos triangulos tienen un angulo igual à un angulo, y los comprehenden lados proporcionales, seràn equiangulos, y tendràn iguales los angulos, que se oponen à lados homologos.

Tengan los triangulos X. Z. los angulos B. y el blanco en E. iguales; y los lados DE. ER. AB. BC. proporcionales. Digo, que el angulo C. es igual al blanco R. y el A. al D. hagase como antes el negro en E. igual al B. y el negro en R. igual al C. y serà el A. igual al G. y seràn los triangulos Z. y S. equiangulos: luego (a) es como AB. a BC. ò DE. a ER. assi GE. a ER. luego (b) DE. y GE. son iguales: y porque los triangulos X. y S. tienen los lados DE. ER. iguales a los GE. ER. y los angulos en E. iguales, seràn (c) equiangulos; y el angulo D. igual al G. ò su igual A. y el blanco en R. igual al negro R. ò su igual C. que es, &c.

Figur. 6.

(a) Prop. 4. lib. 6.

(b) Prop. 11 lib. 5.

(c) Prop. 4. lib. 1.

PROP.

PROP. VII.

Si dos triangulos tienen un angulo igual à un angulo, y à otro le comprehenden lados proporcionales: y el tercero de entrambos es menor, ò no menor que un recto, seràn equiangulos, y tendràn iguales los angulos comprehendidos de lados proporcionales.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

En el triangulo rectangulo la perpendicular, desde el angulo recto à la base, hace dos triangulos semejantes entre sì, y al entero.

Figur. 7. En el triangulo rectangulo CAB. del angulo recto A. cayga la perpendicular AD. Digo, que los triangulos X. Z. son semejantes entre sì, y al CAB. porque en los triangulos Z. y ABC. el angulo A. que se supone recto, es igual al blanco D. que hace la perpendicular, el B. es comun: luego (a) el tercero C. es igual al negro en A. Tambien en los triangulos ACB. y X. los angulos A. y negro D. rectos, son iguales, el C. comun, luego el B. igual al blanco A. luego son equiangulos, luego (b) semejantes: luego los triangulos X. y Z. que son semejantes al ABC. lo son tambien entre sì: que es, &c.

(a) Prop. 32 lib. 1.

(b) Prop 4. lib. 6.

Co-

Corolarios.

Siguese lo primero, que la perpendicular AD. es media proporcional entre CD. y DB. porque siendo semejantes los triangulos X. Z. serà (b) *como CD. à DA. asi DA. à DB.*

Lo segundo, qualquier lado de los que comprehenden el angulo recto, como AC. es medio proporcional entre toda la base BC. y el segmento adjacente al dicho lado DC. porque siendo semejantes los triangulos ACB. y X. serà (b) *BC. à CA. como CB. à CD.*

PROB. I. PROP. IX.

De una recta dada cortar la parte, que se pide.

De la recta RB. se ha de cortar una tercera parte. Del punto R. tirese la RA. con qualquier angulo, tirese la BA. que las junta: tomense en la RA. tres partes iguales, como en S.O.A. desde S. baxesse la SC. paralela à AB. Digo, que RC. es la tercera parte, que se pide; porque las SC. BA. son paralelas: luego (a) es como AS. à SR. asi BC. à CR. pero AS. se supone dupla de SR. luego BC. es dupla de CR. luego CR. es la tercera parte de RB. que es, &c. Figur. 8.

(a) Prop. 2. lib. 6.

PROB.

PROB. II. PROP. X.

Cortar una recta dada en partes semejantes à las de otra recta dada.

Figur. 9. Sea la recta AS. que se ha de cortar en partes semejantes à las AB. BC. CD. de la AD. juntense las dos por el extremo A. tirese la SD. que las junte; y à la SD. (c) por los puntos B. y C. las paralelas BO. CR. Digo, que la AS. queda cortada, como se pide en los puntos O. R. porque serà (a) DC. à CA. como SR. à RA. y CB. à BA. como RO. à OA.

(c) Prop. 31 lib. 1.

(a) Prop. 2. lib. 6.

Si se pide la AS. dividida en algunas partes iguales; v. gr. tres, dividase la AD. en tres partes iguales, y tiradas paralelas sobre la AS. queda dividida como se pide. Consta de la 2. del 6.

PROB. III. PROP. XI.

A dos rectas dadas hallar la tercera proporcional.

Figur. 8. A las rectas RC. RS. juntas en qualquier angulo, se busca la tercera proporcional, que sea como RC. à RS. asi RS. à la que se busca. Alarguese RC. y tomese CB. igual à la segunda RS. tirese la SC. y del punto B. tirese BA. paralela à SC. Digo, que SA. es la tercera que se busca, porque serà (a) co-

(a) Prop. 2. lib. 6.

mo

mo RC. à CB. ò RS. su igual: assi RS. à SA. que es, &c.

A dos numeros dados se halla el tercero en proporcion directa, multiplicando el segundo por sì mismo, y partiendole por el primero; y el quotiente sera el numero que se busca, como 2.4.8.5.10.20.3.9.27.

PROB. IV. PROP. XII.

A tres rectas dadas hallar la quarta proporcional.

A las rectas RC. CB. RS. se busca la quarta proporcional: dispónganse, como se vè en la figura, tirese SC. y à ella del punto B. levantese (a) la paralela BA. y alarguese RS. hasta que concurra en A. Digo, que SA. es la quarta que se busca; porque seràn (b) RC. à CB. como RS. à SA. que es, &c.

Figur. 8.

(a) Prop. 31. lib. 1.

(b) Prop. 2. lib. 6.

Dados tres numeros se halla el quarto en proporcion directa: multiplicando el segundo por el tercero, y partiendo el producto por el primero, el quotiente es el quarto que se busca, como 3.9.6.18. 5.10.40.80.

PROB. V. PROP. XIII.

Entre dos rectas dadas hallar la media proporcional.

Figur. 10.

Las dos rectas AR. RC. dadas, entre quienes se busca la media proporcional, juntense en una recta, como AC. y dividida por medio en E. describase el semicirculo con el semidiametro EC. ò AE. desde R. levantese (a) RB. perpendicular à AC. Digo, que RB. es la media proporcional; porque tiradas las AB. BC. el angulo ABC. es (b) recto: y desde él està tirada à la base la perpendicular BR. luego (c) es AR. à RB. como RB. à RC. que es, &c.

(a) Prop. 11 lib. 1.

(b) Prop. 31 lib. 3.

(c) Corol. Prop. 8. lib. 6.

Entre dos numeros dados se halla uno arithmeticamente proporcional: sumando los dos, y tomando la mitad de la suma, como entre 8. y 10. es el medio 9.

Un numero medio geometrico proporcional se halla, multiplicando entre sì los dos dados: y del producto sacando la raiz quadrada, esta serà el medio que se busca, como entre 4. y 9. multiplicados son 36. cuya raiz es 6. y son proporcionales 4. 6. 9.

Scholio.

Figur. 11.

Entre dos rectas dadas hallar dos medias proporcionales, es el celebrado, y necessario problema, para la duplicacion del cubo, aumentacion, y diminucion de los sòlidos, que hasta aora en todo rigor geometrico no se ha resuelto: de *de varios modos practicos, que ay de resolverle, propondrè el de Platòn, que es muy claro, y bastante para la practica.*

Sean dadas las rectas AO. OC. pidense otras dos, que sean medias proporcionales: dispongan se las dadas, de modo, que hagan el angulo recto O. alarguese AO. àzia E. y CO. àzia R. Formese el angulo recto ARE. de modo, que haciendo tambien el recto REC. la linea EC. cayga en el punto C. lo qual se consigue, aplicando el angulo recto de una esquadra sobre la OR. y el de otra sobre OE. de modo, que un brazo de una cayga sobre A. y el otro de otra sobre C. y las OR. OE. seràn las que se piden: porque (a) la OR. es media proporcional entre AO. y OE. la OE. es media entre OR. y OC. luego es como AO. à OR. assi OR. à OE. y OE. à OC. (a) Prop. 8. lib. 6.

THEOR. IX. PROP. XIV.

Paralelogramos iguales, que tienen un angulo igual à un angulo, tienen reciprocos los lados, que comprehenden iguales angulos: y los que tienen reciprocos los lados, que comprehenden iguales angulos, son iguales.

Sean los paralelogramos iguales X. Z. Figur. 124.

que tengan iguales los angulos C. O. Digo, que tienen reciprocos los lados: esto es, AC. à CB. como FO. à OL. YL. y SB. alargados concurran en Q. El paralelogramo X. es al R. (a) como AC. à CB: y el Z. al R. como FO. à OL. pero X. y Z. son por suposicion iguales: luego (b) el X. es al R. como el Z. al R. luego tambien (c) AC. es à CB. como FO. à OL. que es, &c.

(a)Prop.1. lib.6.
(b) Prop.7. lib.5.
(c)Prop.11 lib.5.

Demuestrase la segunda parte. Como AC. à CB. assi (a) es X. à R. y como FO. à OL. assi Z. à R. pero està demostrado, ò se supone, que es AC. à CB. como FO. à OL. luego el paralelogramo X. (c) es al R. como el Z. al mismo R. luego (d) los X. y Z. son iguales: que es, &c.

(d) Prop.9. lib.5.

THEOR. X. PROP. XV.

Triangulos iguales, que tienen un angulo igual à un angulo, tienen reciprocos los lados, que comprehenden iguales angulos, y los triangulos, que tienen reciprocos los lados, que comprehenden iguales angulos, son iguales.

Consta de la antecedente, porque si los triangulos se cumplen à paralelogramos en los angulos iguales, quedaràn los paralelogramos iguales: (a) y se harà la misma demostracion, que la antecedente.

(a)Prop.34 lib.1.

THEOR.

THEOR. XI. PROP. XVI.

Si quatro rectas son proporcionales, el rectangulo de las extremas es igual al rectangulo de las medias: y si el rectangulo de las extremas es igual al rectangulo de las medias, las quatro rectas son proporcionales.

Sean las quatro proporcionales AB. RG. RE. CB. Digo, que el rectangulo AC. comprehendido de las extremas, es igual al EG. de las medias: porque cerca de iguales angulos, se supone ser AB. à RG. como RE. à CB. luego tienen lados reciprocos, y (a) son iguales. Figur. 13. (a) Prop. 14 lib. 6.

Demuestrase lo segundo: porque siendo los rectangulos iguales, y teniendo un angulo igual à un angulo, luego (a) tienen reciprocos los lados, y es AB. à RG. como RE. à CB. que es, &c.

En numeros se vè lo mismo: porque siendo las quatro proporcionales 2. 4. 8. 16. el rectangulo de las extremas, que es 2. por 16. 32. es igual al rectangulo de las medias, que es 4. por 8. 32.

THEOR. XII. PROP. XVII.

Si tres rectas son proporcionales, el rectangulo de las extremas es igual al quadrado de la me-

media: y si el quadrado de esta es igual al rectangulo de las extremas, las tres son proporcionales.

Figur. 12. Sean proporcionales AC. FO. CL. Digo, que el quadrado de FO. que es OS. es igual al rectangulo AL. de las extremas, porque tomando FS. igual à FO. seràn quatro proporcionales, AC. à OF. como OF. ò su igual FS. à CL. luego (a) el rectangulo AL. es igual al OS. pero este es un quadrado: luego, &c.

(a)Prop.16 lib.6.

Pruebase lo segundo: porque es como AC. à OF. assi FS. ò su igual OF. (a) à CL. luego OF. es media proporcional entre AC. y CL. que es, &c.

Sean tres numeros proporcionales 4. 8. 16. se vè, que el rectangulo de los extremos, que es 64. es igual al quadrado de 8. que es tambien 64.

Corolario.

Figur. 15. lib.2. *De aqui se sigue, que el quadrado de CH. es igual al rectangulo de DC. y CF. que es el rectangulo BD. y à su igual el triangulo A. que es la demostracion de la 14. del 2.*

PROB. VI. PROP. XVIII.

Sobre una recta dada describir un rectilineo

se-

semejante, y semejantemente puesto à un rectilineo dado.

Sobre la AB. se ha de formar un rectilineo X. semejante al Z. dado: resuelvase el Z. en triangulos con las CR. DR. y en los puntos A. y B. haganse (a) à una, y otra parte con las AY. BY. AS. BH. iguales angulos à los que se forman en C. y D. y serà (b) el angulo negro en Y. igual al negro en R. hagase el AYS. igual al CRO. y concurriràn las AS. YS. en el punto S. y serà el angulo S. (b) igual al O. y hecho lo mismo en H. quedan los triangulos del rectilineo X. equiangulos à los del Z. luego (c) es como AB. à BY. asi CD. à DR. en los triangulos XZ. y como BY. à BH. asi DR. à DE. en los triangulos Q. P. luego (d) es por igualdad: como AB. à BH. asi CD. à DE. luego cerca de iguales angulos tienen lados proporcionales; y lo mismo se demuestra de los demàs: luego (e) los rectilineos son semejantes: que es, &c.

Figur. 14.

(a) Prop. 23 lib. 1.

(b) Prop. 32 lib. 1.

(c) Prop. 4. lib. 6.

(d) Prop. 22 lib. 5.

(e) Def. 1. lib. 6.

THEOR. XIII. PROP. XIX.

Triangulos, y paralelogramos semejantes, tienen duplicada la razon de sus lados homologos.

Sean

Figur. 15. Sean los triangulos ſemejantes X. Z. Digo, que tienen duplicada la razon de los lados homologos CA. FY. que ſe oponen à iguales angulos: eſto es, ſi ſe hace EA. a FY. como FY. a QA. es el triangulo X. al Z. como la primera CA. a la tercera QA. porque los triangulos X. Z. ſon ſemejantes, ſerà (a) BA. a LY. como AC. a YF. pero como AC. a YF. aſsi por la conſtruccion YF. a AQ. luego es como BA. a LY. aſsi (b) YF. a AQ. luego los triangulos QBA. y Z. cerca de iguales angulos A. Y. tienen lados reciprocos: luego (c) ſon iguales; pero el triangulo X. al QBA. es (d) como AC. a AQ. luego el X. es al Z. como AC. a AQ. que es, &c.

(a) Prop. 4. lib. 6.

(b) Prop. 11 lib. 5.

(c) Prop. 15 lib. 6.

(d) Prop. 1. lib. 6.

Y del miſmo modo ſe demueſtra de los paralelogramos.

Corolarios.

De aqui ſe ſigue, que dadas tres rectas continuas proporcionales, es como la primera à la tercera, aſsi el triangulo ſobre la primera, à ſu ſemejante ſobre la ſegunda: O. que ſi la baſe, v.gr. del X. es 4. pies, y la de Z. es 2. el triangulo X. es quadruplo de Z. porque teniendo duplicada la razon de 4. à 2. ſeràn los tres terminos 4. 2. 1. y ſerà X. à Z. como 4. à 1. que

es

es razon duplicada de 4. à 2. Tengase presente la Def. 9. del lib. 5.

Siguese lo segundo, que el rectangulo contenido de dos lados, es medio proporcional entre los quadrados de dichos lados, como el rectangulo de 4. y 8. que es 32. es medio proporcional entre 16. y 64. quadrados de dichos lados.

THEOR. XIV. PROP. XX.

Semejantes polygonos se dividen en triangulos semejantes, en igual numero, y de semejante razon con los todos, y estàn en duplicada razon de sus lados homologos.

Sean los polygonos X.Z. semejantes, que tengan angulos correspondientes iguales, y proporcionales los lados, que los comprehenden. Tiradas las AY. BY. CR. DR. quedan divididos en igual numero de triangulos; y porque los angulos S.O. por la suposicion son iguales, y los lados que los comprehenden proporcionales: luego (a) los triangulos ASY. COR. son semejantes; y por la misma razon lo son los Q. P. y porque es YA. a YS. como RC. a CO. y como SA. a AB. OC. a CD. (b) serà por igualdad, YA. a AB. como RC. a CD. y porque los angulos A. C. de los polygonos se suponen igua-

Figur. 14.

(a) Prop. 6. y 4. lib. 6.

(b) Prop. 22 lib. 5.

R

iguales; y el negro A. està demonstrado igual al negro C. luego el angulo residuo blanco en A. es igual al blanco C. luego (a) los triangulos X. y Z. tambien son semejantes.

(c)Prop.19 lib.6.

(d)Prop.12 lib.5.

Pruebase la segunda parte. Por tener todos los triangulos de estos polygonos (c) duplicada razon de sus lados homologos, seràn los triangulos del polygono X. proporcionales à los de Z. siendo los del uno antecedentes, y los del otro consequentes: (d) pero como un antecedente à un consequente, asi la suma de todos los antecedentes, à la suma de todos los consequentes: luego como un triangulo à otro, asi un polygono à otro: luego los triangulos son homologos à los polygonos.

Digo lo tercero, que los polygonos tienen duplicada la razon de sus lados homologos; porque el polygono es al polygono, como un triangulo à otro semejante: pero los triangulos semejantes (e) tienen duplicada razon de sus lados homologos: luego los polygonos tambien: que es, &c.

Corolarios.

De aqui se sigue, que dadas tres continuas proporcionales, es como la primera à la tercera, asi *assi el polygono descripto sobre la primera, à su semejante sobre la segunda.*

Siguese lo segundo, un methodo facil de aumentar, ò disminuir qualquier polygono en una razon dada, como si se pide un polygono duplo del Z. tomese la K. dupla de CD. entre estas dos, hallesse (e) la media proporcional, como AB. y el polygono sobre AB. es el que se pide. Si de un polygono hecho sobre una linea de 2. pies, se pide otro, que sea quadruplo, tomese el 8. quadruplo de 2. entre 2. y 8. la media proporcional es 4. el polygono semejante hecho sobre esta, es el que se pide: Consta de lo dicho. (e)Prop.13 lib.6.

THEOR. XV. PROP. XXI.

Los rectilineos, que son semejantes à uno mismo, lo son entre sì.

Consta por sì misma, entendida la Defin. 1. del lib. 6.

THEOR. XVI. PROP. XXII.

Rectilineos semejantes, y semejantemente descriptos sobre quatro rectas proporcionales, lo seràn entre sì: y si los tales rectilineos fueren proporcionales, las rectas lo seràn tambien.

Porque A. a B. y E. a D. tienen (a) duplicada razon de FY. a LQ y de OR. a SC. pe- Figur. 161. (a)Prop.19. y 20. lib.6.

ro la razon de FY. a LQ. se supone ser la misma, que la de OR. a SC. luego (b) la razon del rectilineo A. al B. es la misma, que la E. a D. luego los rectilineos son proporcionales.

(b)Prop.34 lib.5.

Pruebase la segunda parte. Porque los rectilineos A. B. E. D. se supone tener una razon misma: luego (c) las FY. LQ.OR.SC. de quienes los rectilineos tienen razon duplicada, tendràn tambien la misma razon entre sì, y seràn proporcionales: que es, &c.

(c)Prop.35. lib.5.

THEOR. XVII. PROP. XXIII.

Paralelogramos equiangulos tienen entre sì la razon compuesta de sus lados.

Figur. 12.

Sean los paralelogramos X. Z. que tengan los angulos C. O. iguales. Digo, que tienen entre sì la razon compuesta de las razones, que tienen los lados del uno à los del otro: juntense los paralelogramos, de suerte, que AC. y CB. compongan una recta, y tambien LC. y CF. alarguense YL. SB. hasta que concurran en Q. porque es (a) como el X. al R. assi AC. a OB. y como R. a Z. assi LC. a OF. y la proporcion de X. a Z. se compone de las intermedias (b) de X. a R. y de R. a Z. luego tambien la proporcion de

(a) Prop.1. lib.6.

(b) Def. 5. lib.6.

de X. a Z. ſe compone de las proporciones de AC. a OB. y LC. a OF. que es, &c.

Corolario.

Los triangulos, que tienen un angulo igual à un angulo, tienen la razon compueſta de las razones de los lados, que comprehenden los angulos iguales.

Nota.

Para la inteligencia de eſta propoſicion, tengaſe preſente la Defin. 5. de eſte.

THEOR. XVIII. PROP. XXIV.

En qualquier paralelogramo, los paralelogramos, que corta el diametro, ſon ſemejantes al todo, y entre sì.

Corte el diametro AC. los paralelogramos GE. FH. Digo, que ſon ſemejantes al todo BD. porque el angulo A. es comun à los GE. y BD. el AGY. es igual al B. (a) y los opueſtos (b) iguales à los dichos: luego los paralelogramos GE. y BD. ſon equiangulos; y por la miſma razon lo es el FH. y porque el triangulo AGY. es equiangulo al ABC. y el AEY. al ADC. luego (c) los lados AG. y GY. ſon proporcionales à los AB. y BC. ademàs como GY. a YA. aſsi es BC. a CA. y como YA. a YE. aſsi CA. a CD. luego (d) por igualdad GY. a YE. como BC. a CD.

Figur. 17.

(a) Prop. 29 lib. 1.

(b) Prop. 34 lib. 1.

(c) Prop. 4. lib. 6.

(d) Prop. 22 lib. 5.

CD. luego cerca de iguales angulos tienen lados proporcionales; porque de los demàs angulos se prueba lo mismo: luego (e) son semejantes: y lo mismo se demuestra del paralelogramo FH. luego los dos FH. y GE. son semejantes entre sì, porque (r) lo son al BD.

(e) Def. 1. lib. 6.

(r) Prop. 21 lib. 6.

PROB. VII. PROP. XXV.

Formar un rectilineo semejante, y semejantemente puesto à un rectilineo, y igual à otro dados.

Figur. 18.

Se ha de formar un rectilineo semejante al A. igual al B. dados. Sobre el lado CD. formese (a) el paralelogramo CE. igual al rectilineo A. y sobre la DE. en el angulo EDG. igual al FCD. Formese (b) el DH. igual al B. y serà CDG. una recta, y tambien FEH. entre CD. y DG. busquese (c) la media proporcional YK. formese sobre ella (d) el rectilineo L. semejante al A. Digo, que L. es igual al B. porque serà (e) como la primera CD. à la tercera DG. asi el rectilineo A. de la primera, al L. de la segunda YK. pero como CD. à DG. (r) asi el CE. al DH. luego (g) como el CE. al DH. asi A. à L. pero como CE. à DH. asi es por la construccion A. à B. luego es (g) como A. à B. asi

(a) Prop. 45 lib. 1.

(b) Prop. 44 lib. 1.

(c) Prop. 13 lib. 6.

(d) Prop. 18 lib. 6.

(e) Prop. 19 ò 20. lib. 6.

(r) Prop. 1. lib. 6.

(g) Prop. 11 lib. 5.

assi A. à L. luego (h) B. es igual à L. tambien L. se hizo semejante à A. luego: que es, &c. (h)Prop.9. lib.5.

THEOR. XIX. PROP. XXVI.

Los paralelogramos semejantes, que tienen un angulo comun, los corta el mismo diametro.

Porque si à los semejantes BD. EG. no corta el mismo diametro ARC. sea, si puede ser, otro, como AHC. y desde H. tirese la HY. (a) paralela à RG. y porque à los paralelogramos BD. EY. los corta el mismo diametro AHC. seràn (b) semejantes, y serà (c) como BA. a AD. assi EA. a AY. pero como BA. a AD. assi se suponia EA. a AG. luego EA. es a AY. como a AG. luego (d) AY. y AG. son iguales: la parte à su todo.

Figur. 19.
(a)Prop.31 lib.1.
(b)Prop.24 lib.6.
(c) Def. 1. lib.6.
(d)Prop.9. lib.5.

PROP. XXVII.

De todos los paralelogramos aplicados à una misma recta, y deficientes en figuras paralelogramas semejantes, y semejantemente puestas, es el mayor el que se aplicare à la mitad.

PROP. XXVIII.

Sobre una recta dada aplicar un paralelogramo igual à un rectilineo dado, y deficiente con un paralelogramo semejante à un paralelogramo dado.

PROP.

PROP. XXIX.

Sobre una recta dada aplicar un paralelogramo igual à un rectilineo dado, y excedente con un paralelogramo semejante à un paralelogramo dado.

Estas tres quasi no son de uso.

PROB. X. PROP. XXX.

Cortar una recta dada segun la extrema, y media razon.

Figur. 19. (a)Prop.11 lib.2. Cortese (a) la DC. en S. de modo, que el rectangulo de DC. y SC. sea igual al quadrado de DS. Digo, que està la DC. cortada segun la extrema, y media razon: porque ay tres rectas DC. DS. SC. y el rectangulo de las extremas es igual al quadrado de la media: luego (b) son continuas proporcionales, y la recta (c) està cortada, como se pide: que es, &c. (b)Prop.17 lib.6. (c) Def. 3. lib.6.

THEOR. XXI. PROP. XXXI.

Si de los lados de un triangulo rectangulo se describen qualesquiera figuras semejantes, la que se describe del lado opuesto al angulo recto, es igual à las otras dos juntas.

Figur. 20. (a)Prop.19 ò 20.lib.6. Como el quadrado de AC. al de RC. assi (a) qualquier figura de AC. à su semejante

de

de RC. y lo mismo es de la RA. luego (b) como los quadrados de RA. y AC. al quadrado de RC. assi qualesquiera figuras de RA. y AC. à su semejante de la RC. pero (c) los quadrados de RA. y AC. son iguales al de AC. opuesto al angulo A. que se supone recto: luego qualesquiera figuras semejantes de RA. y AC. son iguales à su semejante de RC. que es, &c.

(b) Prop. 24 lib. 5.

(c) Prop. 47. lib. 1.

PROP. XXXII.

Si dos triangulos, que tienen dos lados proporcionales à dos lados, se componen segun un angulo, quedando paralelos los lados proporcionales, los demàs lados de los triangulos compondràn una linea recta.

No es menester.

THEOR. XXIII. PROP. XXXIII.

En circulos iguales los angulos, assi en el centro, como en la circunferencia tienen la misma proporcion, que las circunferencias, sobre quienes insisten, y la misma tienen los sectores.

En los dos circulos iguales S. Y. digo, que los angulos en el centro S. Y. tienen la misma proporcion, que las circunferencias RAD. y EB. sobre que insisten. Sea v. gr. el arco RAD. duplo del EB. Digo, que el

Figur. 21.

(a) Prop. 30 lib. 3. angulo S. es duplo del Y. cortese (a) el arco RAD. por medio en A. y tirese la AS. y serà cada uno de los arcos RA. AD. igual al EB. luego (b) cada uno de los angulos RSA. ASD. es igual al Y. y los dos juntos RSD. duplo del Y. y lo mismo se demostrarà, si las circunferencias RAD. EB. tuvieren qualquiera otra razon.

(b) Prop. 27 lib. 3.

Digo lo mismo de los angulos en la circunferencia, porque (c) son mitades de los angulos en el centro.

(c) Prop. 20 lib. 3.

Del mismo modo se demuestra, que el sector RSD. es duplo del EYB. porque los triangulos (d) L.H.K. son iguales, y los segmentos RA. AD. EB. tambien son iguales, porque siendo iguales las rectas, y los arcos, sobrepuestos se ajustarian: luego el RSD. es duplo de EYB.

(d) Prop. 4. lib. 1.

Corolarios.

De aqui se sigue, que el sector al sector, tiene la misma proporcion que el angulo al angulo, porque es la misma, que el arco al arco.

Siguese lo segundo, que como el angulo en el centro à quatro rectos, assi es su arco à toda la circunferencia.

LI-

LIBRO XI.

Los Libros septimo, octavo, nono, y decimo, por prolijos, y poco necessarios à los mas de los tratados Mathematicos, omiten yà todos Comentadores de Euclides, por lo que yo tambien los dexo. Y aun los Libros once, y doce muchos tambien se los han dexado, como el Padre Fournier, Larrando de Mauleon, Carduchi, y otros, no porque no sea su utilidad muy apreciable, sino por no enredar à los principiantes con lo espinoso, y dificil de sus arduas demostraciones. No me parece justo privarlos de la singular utilidad de los Theoremas de estos dos Libros, y dexadas pocas proposiciones, que no parecen necessarias, en las que son mas enredosas, quales son las que tratan de la proporcion de los solidos, sus razones triplicadas, la duplicada de los circulos, &c. Usarè de un methodo mas breve, y claro, que el que comunmente usan los Comentadores de Euclides, y aun algunas demostrarè con brevedad mayor, que el P. Andrès Tacquet, que fue quien con singular comprehension, y magisterio facilitò mucho estos dos Libros.

DEFINICIONES.

1 SOlido, ò cuerpo, es una magnitud, que tiene longitud, latitud, y profundidad.

2 Los terminos del sòlido son las superficies.

Figur. 1. 3 Linea recta, ò perpendicular à un plano, es la que forma angulos rectos con todas las rectas, que toca de dicho plano.

Imaginese, que la recta BA. toca el papel, ò el plano CC. solo con el punto A. estando todo lo demàs de la linea elevado sobre el papel, y el plano, al modo que està el gnomon de un Relox de Sol sobre la pared, ò una estaca clavada en la tierra, (uso de estos exemplos, para evitar la equivocacion, que suele aqui padecerse) si la linea AB. cae tan derecha sobre el plano, que no se inclina mas à un lado, que à otro, todos los angulos BAC. seràn rectos: argumento evidente de ser la BA. perpendicular sobre el plano CC.

4 Un plano se llama recto, ò perpendicular à otro, quando todas las rectas, que en el uno se tiran perpendiculares à la seccion comun, son perpendiculares al otro plano.

Co-

Como el plano AB. es perpendicular sobre el CD. quando las rectas FG. HY. tiradas en el plano AB. perpendiculares à la seccion comun EB. son perpendiculares al plano CD. Figur. 2.

5 Si una recta no es perpendicular à un plano, y de su punto mas alto se tira una perpendicular al dicho plano, y en èl se juntan los extremos de ambas, el angulo contenido de esta, que los junta, y de la linea dada, es la inclinacion de la linea sobre el plano.

Como la inclinacion de la AB. sobre el plano RS. es el angulo EAB. Figur. 3.

6 Inclinacion de un plano sobre otro, es el angulo agudo contenido de las rectas, que se tiran en ambos planos à un mismo punto perpendiculares à la seccion comun.

Como la inclinacion del plano CD. sobre el AB. es el angulo HFG. comprehendido de las HF. GF. que en el punto F. son perpendiculares à la seccion comun ED. la una en un plano, y la otra en otro. Figur. 4.

7 Planos semejantemente inclinados, son aquellos, cuyos angulos de inclinacion son iguales.

8 Paralelos planos, son los que alarga-

gados àzia qualquiera parte conservan entre sì igual distançia.

9 Semejantes figuras sòlidas, son las que estàn contenidas de semejantes planos iguales en numero.

10 Iguales, y semejantes figuras sòlidas, son las que estàn contenidas de semejantes planos iguales en numero, y en magnitud.

11 Angulo sòlido rectilineo es, el que consta de mas que dos angulos planos, que no estàn en un mismo plano, y concurren en un punto.

Figur. 5. *Como el angulo sòlido A. que consta de los tres BAD. DAC. BAC. que estàn en distintos planos. Y para que se haga mejor concepto, vease, figur. 6. el angulo solido O. contenido de los ROC. SOC. ROS. que estàn en distintos planos, y concurren en el punto O. y aun mejor se concibe en la figur. 7. el angulo sòlido S. contenido de los tres BSD. OSD. BSO.*

12 Prisma es una figura sòlida contenida de planos, de quienes dos opuestos son paralelos iguales, y semejantes, y los demàs paralelogramos.

Figur. 6. *Como el de la figur. 6. tiene los triangulos opuestos BCA. ROS. paralelos iguales, y seme-*

jan-

jantes, y los otros planos son paralelogramos. ACOS. BCOR. BARS. ò como el de la figur. 8. que tiene los dos paralelogramos opuestos. ABDC. FEHG. paralelos iguales, y semejantes, y los demàs planos son paralelogramos.

13 Paralelepipedo, es un sòlido, que està contenido de seis quadrilateros, de quienes los opuestos son paralelos: *como el de la figur. 7. y 8.*

Los paralelepipedos son especie de prismas; y assi todo paralelepipedo es prisma; mas no al contrario: el paralelepipedo se concibe, imaginando una columna de quatro caras.

14 Cubo es un paralelepipedo, cùyos seis planos son quadrados iguales.

Qual es un dado, cuyas seis caras son quadrados iguales.

THEOR. I. PROP. I.

De una linea recta no puede una parte estàr en un plano, y otra elevada sobre èl.

De la RA. digo, que no puede una parte, como RC. estàr en un plano, y otro parte, como CA. estàr elevada sobre dicho plano. Consta de la Defin. 4. del lib. 1. porque la recta debe ser la mas breve entre los puntos R. y A. Figur. 9.

THEOR.

THEOR. II. PROP. II.

Si dos rectas se cortan, estaràn en un plano con todos los triangulos que formaren.

La segunda parte consta, porque triangulo es una superficie plana; y tambien la primera, porque si no, una parte de dichas lineas estarìa en un plano, y otra elevada sobre èl: lo que (a) no puede ser.

(a) Prop. 1. lib. 11.

THEOR. III. PROP. III.

Si dos planos se cortan entre sì, la seccion comun es una linea recta.

Figur. 10. Cortense los planos RA. AD. Digo, que la seccion comun CS. es una recta; porque si no, en el plano RB. tirese la recta COS. y en el AD. la CYS. y dos rectas cerraràn un espacio: lo que (a) no puede ser.

(a) Axiom. 11. lib. 1.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si una recta es perpendicular en la seccion comun à dos rectas, serà tambien perpendicular al plano, en que estàn los dos rectas.

Figur. 11. Sea la AB. perpendicular à las CD. EF. Digo, que es tambien perpendicular al plano GH. en que estàn; esto es, que si se tira qualquiera, como KBO. la AB. harà con

ella

ella angulos rectos: cortense iguales BC. BD. BE. BF. y tirense las AC. AD. AE. AF. CF. DE. AK. AO.

Demostracion. En los triangulos ABC. ABD. ABE. ABF. el lado AB. es comun, y los BC. BD. BE. BF. iguales, y los angulos en B. rectos: luego (a) las bases AC. AD. AE. AF. iguales; y porque los angulos CBF. EBD. tienen dos lados à dos lados, por la suposicion, ò construccion iguales, y los angulos (b) comprehendidos en B. iguales: luego (a) la base FC. es igual à la DE. y los angulos BED. BFC. En los triangulos KBF. EBO. los angulos KBF. EBO. son (b) iguales, y los BEO. BFK. estàn demostrados iguales, y los lados FB. BE. iguales: luego (c) tambien lo son los EO. KF. OB. BK. Además, porque los triangulos ACF. ABD. son entre sì equilateros, tendràn (d) todos los angulos iguales; y los triangulos AEO. AFK. tienen los lados AE. AF. EO. FK. iguales, y tambien los angulos AEO. AFK. lo estàn demostrados: luego (a) tambien lo son las bases AK. AO. Finalmente, en los triangulos ABK. ABO. el lado AB. es comun, los BK. BO. estàn demostrados iguales, y tambien las bases AK. AO. luego (d) los

(a) Prop. 4. lib. 1.

(b) Prop. 15. lib. 1.

(c) Prop. 26. lib. 1.

(d) Prop. 8. lib. 1.

(e) Def. 3. lib. 11.

angulos ABK. ABO. son iguales, y rectos: que es, &c.

Scholio.

He puesto esta demostracion de los Padres Clavio, Dechales, y otros, por su ingeniosidad, y porque ayuda mucho à formar la phantasia de los que empiezan à cerca de las lineas, que de unos planos se tiran à otros: pero si les pareciere prolija, podràn contentarse con la siguiente.

Figur. 12. Otra demostracion. Cayga la OR. haciendo angulos rectos con las AC. BD. que se cortan en el punto O. Digo, que es perpendicular al plano, en que estàn: porque por ser todos los angulos en O. rectos, la OR. no se inclina mas à uno, que à otro de los quatro extremos A. B. C. D. luego de las partes del plano, en que estàn essos extremos, tampoco se inclina mas à una, que à otra: no inclinandose en el plano mas à una parte, que à otra: luego (a) es perpendicular al plano: que es, &c.

(a) Def. 3. lib. 11.

THEOR. V. PROP. V.

Si tres rectas son perpendiculares à una recta en un mismo punto, todas tres estàn en un mismo plano.

Sean

Sean rectos todos los angulos, que en el punto B. hace la AB. con las BC. BD. DS. Digo, que estas tres estàn en un mismo plano; porque sino, una como BC. està en diverso plano; y tocando à la AB. en el punto B. tenga el extremo C. en un plano superior, ò inferior al de las otras: luego tendrà à la AB. desigual inclinacion, que las otras: luego (a) harà con la AB. desigual angulo, que las otras; pero todas se suponia hacerle recto: luego ninguna puede estàr en distinto plano, que las otras: que es, &c. Figur. 13.

(a) Def. 8. lib. 1.

THEOR. VI. PROP. VI.

Rectas perpendiculares à un plano, son entre sì paralelas.

Porque por qualesquiera rectas, como AR. BC. puede passar el plano OS. estaràn en un mismo plano, y con (a) la RC. que las junta; pero los dos angulos internos R. C. se suponen rectos: luego (b) las AR. BC. son paralelas: que es, &c. Figur. 14.

(a) Prop. 2. lib. 11.
(b) Prop. 28. lib. 1.

THEOR. VII. PROP. VII.

La recta, que corta dos paralelas, està con ellas en el mismo plano.

Corte la ER. las paralelas AB. CD. Digo, Figur. 15.

que està con ellas en un mismo plano; porque sino, cortese el plano de las paralelas con otro, por los puntos E.R. y sea la seccion comun ESR. que serà (a) recta: luego las rectas ER. ESR. cierran un es espacio: lo que no (b) puede ser.

(a) Prop.3. lib.11.
(b) Axiom. 11. lib.1.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si de dos paralelas rectas la una es perpendicular à un plano, tambien lo serà la otra.

Es como Axioma, y consta de la 6.

THEOR. IX. PROP. IX.

Las rectas paralelas à otra recta, aunque no estèn con ella en un mismo plano, son paralelas entre sì.

Figur. 16.

Sean las AB. CD. paralelas à la ES. que no està en un mismo plano con ellas, digo, que son paralelas entre sì. Tirese YR. perpendicular à ES. en el plano de las AB. ES. y la RO. perpendicular à ES. en el plano de las ES. CD. y porque ER. es perpendicular à las RY. RO. que concurren en R. serà (a) perpendicular al plano de ellas; pero AB. es paralela à ES. luego (b) tambien es perpendicular al plano de las YR. RO. por la misma razon CD. es perpendicular al mismo pla-

(a) Prop.4. lib. 11.
(b) Prop.8. lib.11.

plano: luego (c) las AB. CD. ſon paralelas entre sì: que es, &c. (c) Prop. 6. lib. 11.

THEOR. X. PROP. X.

Si dos rectas, que concurren en un plano, ſon paralelas à otras dos, que concurren en otro, comprehenden iguales angulos.

Sean BC. CA. paralelas à RO. OS. en diſtintos planos. Digo, que el angulo BCA. es igual al ROS. cortenſe BC. RO. y tambien CA. OS. iguales, y tirenſe BR. CO. AS. y ſeràn (a) BR. igual, y paralela à CO. y tambien la AS. à CO. luego (b) BR. y AS. ſon iguales, y paralelas entre sì: luego las RS. y BA. que las juntan (a) lo ſon tambien: luego los triangulos BCR. ROS. ſon entre sì equilateros: luego (c) los angulos BCA. ROS. ſon iguales: que es, &c.

Figur. 6.

(a) Prop. 33 lib. 1.

(b) Prop. 9. lib. 11.

(c) Prop. 8. lib. 1.

PROB. I. PROP. XI.

Tirar una perpendicular à un plano de un punto dado fuera de èl.

En el plano DC. del punto A. ſe ha de tirar una perpendicular al plano: tireſe en el plano qualquier recta RE. tireſe del punto A. AE. (a) perpendicular à RE. y de E. la (b) perpendicular EO. y à eſta tireſe (a) del pun-

Figur. 17.

(a) Prop. 12 lib. 1.

(b) Prop. 11 lib. 1.

punto A. la perpendicular AO. Digo, que AO. es perpendicular al plano DC. tirese SO. paralela (r) à RE. por ser perpendicular RE. à las EO. EA. serà (c) perpendicular al plano AEO. y siendo SO. paralela à RE. serà (d) SO. perpendicular al plano mismo: luego serà perpendicular à AO. siendo pues AO. perpendicular à las EO. OS. serà (c) perpendicular al plano DC. que es, &c.

(r) Prop. 31 lib. 1.
(c) Prop. 4. lib. 11.
(d) Prop. 8. lib. 11.

PROB. II. PROP. XII.

Levantar una perpendicular à un plano de un punto dado en èl.

Figur. 14.

Del punto R. dado en el plano OS. se ha de levantar una perpendicular. De el punto B. tomado fuera del plano, tirese (a) la perpendicular BC. del punto R. tirese (b) la RA. paralela à BC. digo, que RA. es perpendicular al plano. Consta de la prop. 8.

(a) Prop. 11 lib. 11.
(b) Prop. 31 lib. 1.

THEOR. XI. PROP. XIII.

De un punto dado en un plano, no se pueden tirar dos perpendiculares al mismo plano.

Porque tales perpendiculares debian (a) ser paralelas: lo que es imposible, concurriendo en el punto dado.

(a) Prop. 6. lib. 11.

THEOR.

THEOR. XII. PROP. XIV.

Si una recta es perpendicular à dos planos, seràn paralelos.

Sea RS. perpendicular à los planos AB. CD. Digo, que estos planos son entre sì paralelos: tirese OE. paralela à RS. y tirense RO. SE. Por ser OE. paralela à RS. que es perpendicular à los dos planos, lo serà (a) tambien la OE. luego (b) los angulos R. O. S. E. son rectos, y las RO. SE. paralelas, y OS. un paralelogramo: luego (c) RS. OE. son iguales, y los planos equidistantes, ò paralelos: que es, &c.

Figur. 18.

(a) Prop. 8. lib. 11.
(b) Def. 3. lib. 11.
(c) Prop. 34. lib. 1.

THEOR. XIII. PROP. XV.

Si dos rectas, que se tocan en un plano, son paralelas à otras dos, que se tocan en otro, tambien los planos, que passan por ellas, son paralelos.

Las rectas BA. AC. que se tocan en A. sean paralelas à ED. DR. que se toçan en D. en distinto plano. Digo, que los planos BC. BR. son paralelos: tirese (a) AY. perpendicular al plano ER. y cayga en Y. por Y. en el mismo plano tirense YS. YH. paralelas (b) à DE. DR. y porque las AB. YH. son paralelas à ED. lo son (c) entre sì: luego (d) los angulos BAY. BYH. son iguales à dos rec-

Figur. 19.

(a) Prop. 11 lib. 11.
(b) Prop. 31 lib. 1.
(c) Prop. 9. lib. 11.
(d) Prop. 29 lib. 1.

rectos; pero el AYH. es recto: luego tambien lo es el BAY. del mismo modo se demuestra recto el CAY. y porque YA. es perpendicular à las BA. AC. serà (r) perpendicular al plano BC. luego AY. es perpendicular à los planos BC. ER. luego (s) estos planos son entre sì paralelos: que es, &c.

(r) Prop. 4. lib. 11.
(s) Prop. 14. lib. 11.

THEOR. XIV. PROP. XVI.

Si dos planos paralelos se cortan con otro, las comunes secciones son paralelas.

Figur. 20.

Cortense los planos AB. CD. paralelos con el ER. Digo, que las comunes secciones EH. CO. son paralelas; porque sino lo son, prolongadas concurriràn, como en Y. por estàr en el mismo plano ER. pero la recta AEY. està entera en el plano AB. y la CO. en el (a) CD. luego los planos prolongados tambien concurriràn: lo que no puede ser, por suponerse paralelos: luego, &c.

(a) Prop. 1. lib. 11.

THEOR. XV. PROP. XVII.

Si planos paralelos cortan dos rectas, las cortan en partes proporcionales.

Figur. 21.

A las rectas AB. CD. corten los planos paralelos EF. GH. YK. Digo, que serà LM. à MN. como OP. à PQ. tirense las rectas LO. NQ. en los planos EF. YK. y la recta LQ. que passe por el plano GH. en el pun-

punto R. y de èl tirense RM. RP. en el plano GH. y estarà (a) el triangulo LNQ. en un plano, y el LOQ. tambien en un plano; y porque los planos GH. YK. se cortan con el del triangulo LNQ. las comunes secciones MR. NQ. seràn (b) paralelas: y por lo mismo lo seràn RP. y LO. luego es (c) como LR. à RQ. asi LM. à MN. y como LR. à RQ. asi OP. à PQ. luego (d) es LM. à MN. como OP. à PQ. que es, &c.

(a) Prop. 2. lib. 11.
(b) Prop. 16. lib. 11.
(c) Prop. 2. lib. 6.
(d) Prop. 11. lib. 5.

THEOR. XVI. PROP. XVIII.

Si una recta es perpendicular à un plano, todos los planos, que passan por ella, son perpendiculares al mismo plano.

Sea la recta AB. perpendicular al plano CD. y passe por AB. qualquier plano ER. siendo la comun seccion RS. y de un punto suyo, como H. tirese (a) HY. paralela à AB. en el plano ER. y porque AB. YH. son paralelas, y AB. es perpendicular al plano CD. tambien (b) lo serà al mismo plano, y (c) à la comun seccion RS. del mismo modo se demuestra de qualquier otra paralela à la AB. luego (d) el plano ER. es perpendicular al plano CD. y lo mismo se demuestra de qualquier otro, que passe por AB. luego: que es, &c.

Figur. 22.

(a) Prop. 31. lib. 1.
(b) Prop. 8. lib. 11.
(c) Def. 3. lib. 11.
(d) Def. 4. lib. 11.

THEOR. XVII. PROP. XIX.

Si dos planos, que ſe cortan, ſon perpendiculares à un plano, la comun ſecccion de entrambos ſerà perpendicular al miſmo plano.

Figur. 23. Los dos planos AB. CD. que ſe cortan por la ES. ſean perpendiculares al plano RH. Digo, que la comun ſeccion ES. es perpendicular al miſmo plano; porque deſde S. en el plano AB. podrà levantarſe una perpendicular al plano RH. conviene à ſaber (a) la que del punto S. en el plano AB. fuere perpendicular à la comun ſeccion de los planos AB. y RH. aſsimiſmo en CD. podrà (a) levantarſe del punto S. una perpendicular al plano RH. pero (b) del punto S. no ſe puede levantar mas, que una perpendicular al plano RH. luego la tal perpendicular aviendo de eſtàr en ambos planos AB. CD. ſerà la comun ſeccion ES. que es, &c.

(a) Def. 4. lib. 11.

(b) Prop. 13 lib. 11.

THEOR. XVIII. PROP. XX.

Si un angulo ſòlido eſtà contenido de tres angulos planos; qualeſquiera dos juntos ſon mayores, que el tercero.

Figur. 24. El angulo ſòlido A. eſtè contenido de los tres angulos planos, que concurren en el punto A. Digo, que qualeſquiera dos juntos son mayores, que el tercero; porque si los tres son iguales, es evidente, si no son iguales, sea el maximo BAD. digo, que este tambien es menor, que los otros dos juntos. Hagase el (a) BAE. igual al BAC. y cortense iguales AC. y AE. y porque los triangulos X. y R. tienen los angulos en A. y los lados que los contienen iguales, tendràn las (b) bases CB. y BE. iguales; pero BC. y CD. son (c) mayores, que BD. luego CD. es mayor, que ED. luego los triangulos S. O. tienen los lados EA. y DA. iguales a DA. y AC. y la base CD. mayor, que la DE. luego (d) el angulo CAD. es mayor, que el DAE. pero los EAB. y BAC. estàn hechos iguales: luego los ABC. y CAD. juntos son mayores, que los BAE. EAD. ò el total BAD. que es, &c.

(a) Prop. 23. lib. 1.

(b) Prop. 4. lib. 1.

(c) Prop. 20. lib. 1.

(d) Prop. 24. lib. 1.

THEOR. XIX. PROP. XXI.

Todos los angulos planos, que pueden componer un angulo sòlido, juntos son menores, que quatro rectos.

Sea el angulo sòlido A. contenido de los cinco angulos planos, que concurren en el punto A. Digo, que todos cinco, y aunque fuessen mas en numero, son menores, que quatro rectos: tirense las bases de essos an-

Figur. 25.

gulos, y quedan constituìdos los angulos sòlidos B. C. D. E. F. y porque del angulo sòlido C. los dos (a) ACB. ACD. son mayores, que el tercero BCD. y lo mismo sucede en los D.E.F.B. luego los diez angulos planos son mayores, que los cinco CDE. DEF. EFB. FBC. BCD. pero estos cinco son iguales à seis (b) rectos: luego los diez son mayores, que seis rectos; pero los diez con los cinco, que forman el angulo sòlido A. son iguales à diez (c) rectos: luego siendo los diez mas de seis rectos, valdràn los cinco, que concurren en A. menos de quatro rectos: que es, &c.

(a) Prop. 20 lib. 11.

(b) Corol. Prop. 32. lib. 1.

(c) Prop. 32 lib. 1.

Scholio.

De aquì se sigue, que solas tres figuras planas, regulares, è iguales, conviene à saber, triangulos, quadrados, y pentagonos, pueden formar un cuerpo regular, como quatro triangulos equilateros forman el tetraedo, ò pyramide: ocho triangulos equilateros, el octaedro: veinte triangulos equilateros, el icosaedro: seis quadrados, el cubo: diez pentagonos, el dodecaedro.

Cuerpo regular es, el que està contenido de planos regulares, è iguales.

De-

Demuestrase el Scholio.

De dos triangulos equilateros no se forma angulo sòlido, porque (a) para este son menester à lo menos tres angulos planos. (a) Def. 11. lib. 11.

De tres triangulos equilateros, que concurren en un punto: de quatro, y de cinco se forma el angulo sòlido de la pyramide, del octaedro, y del icosaedro.

De tres angulos de pentagono se formã el angulo sòlido del dodecaedro.

Tres quadrados, que concurren en un punto, forman el angulo sòlido del cubo.

Todos estos angulos pueden formar angulo sòlido, por ser menores, que quatro rectos, como consta de la Tabla puesta al fin de la 32. del lib. 1.

Fuera de estos cinco, no puede aver otro cuerpo regular, porque no pueden formar angulo sòlido seis angulos de triangulo equilatero, ni quatro de quadrado, ni quatro de pentagono, ni tres de exagono, y mucho menos tres de polygonos regulares de mas lados; porque los angulos referidos, ò son iguales, ò mayores, que quatro rectos, como consta de la misma Tabla.

PROP. XXII.

Dados tres angulos rectilineos contenidos

de

de iguales rectas, de los quales cada dos son mayores, que el tercero, se podrà hacer un triangulo de las bases, que juntan dichas rectas iguales.

PROP. XXIII.

Formar un angulo sòlido de tres angulos planos, cada dos de los quales sean mayores, que el tercero, y todos juntos menores, que quatro rectos.

Son prolijas, y quasi de ningun uso.

THEOR. XXI. PROP. XXIV.

Si un sòlido està contenido de planos paralelos, los opuestos son paralelogramos semejantes, y iguales.

Figur. 26. Estè el sòlido AB. terminado de planos paralelos, digo, que los planos opuestos son paralelogramos semejantes, y iguales; porque el plano FE. corta los dos paralelos EA. BE. las comunes secciones FA. DE. (a) son paralelas; y assimismo se prueba ser paralelas FD. y AE. luego (b) AD. es paralelogramo, y por lo mismo lo son AG. FB.

(a) Prop. 16 lib. 11.

(b) Def. 32. lib. 1.

Digo lo segundo, que son semejantes, y iguales; porque siendo AE. EG. paralelas à FD. DB. y cada una igual à su correspondiente, los angulos AEG. FDB. son (c) iguales;

(c) Prop. 10 lib. 11.

les; y lo mismo se demuestra de los lados, y angulos opuestos de los otros paralelogramos: luego son iguales, y tambien semejantes: que es, &c.

THEOR. XXII. PROP. XXV.

Si un paralelepipedo se corta con un plano paralelo à los opuestos, serà como la base à la base, assi el sòlido al sòlido.

Demuestrase del mismo modo, que la primera del 6. porque si la base AR. cabe, v.gr. dos veces en la base DH. tambien el sòlido AC. cabrà dos veces en el EB. luego los segmentos sòlidos tienen la razon de sus bases. Figur. 27.

PROP. XXVI.

A una recta dada, y à un punto en ella, formar un angulo sòlido igual à uno dado.

PROP. XXVII.

Sobre una recta dada describir un paralelepipedo semejante, y semejantemente puesto à un paralelepipedo dado.

No son menester.

THEOREMA UNIVERSAL.

Si dos magnitudes se multiplican por otra tercera, los productos son proporcionales à las magnitudes multiplicadas.

Esta es equivalentemente la prop. 15. del lib.

lib. 5. que dice, que los equimultiplices tienen entre sì la misma razon, que las cantidades, de quien son equimultiplices; y dos productos nacidos de la multiplicacion de A. por D. y B. por D. son equimultiplices de A. y B. solo requiere alguna explicacion para su inteligencia. Vease el exemplo: Donde A. multiplicada por D. y B. multiplicada por la misma D. producen S. y R. que tienen entre sì la misma razon que A. y B. Tambien F. y G. multiplicadas por Y. producen L. y N. que tienen la misma razon que F. y G. y lo mismo sucede, si una, ò algunas lineas se multiplican por otra, ò algunos planos por otra cantidad.

D. 4.
A. 4. B. 6.
S. 16. R. 24.
Y. 8.
F. 8. G. 4.
L. 64. N. 32.

THEOR. XXIII. PROP. XXVIII.

Un paralelepipedo se divide en dos prismas iguales, por el plano diagonal.

Figur. 28.

En el paralelepipedo AB. tiradas las diagonales FD. GC. digo, que los prismas ACGFED. HGCDBF. son iguales, porque se engendran de las bases perpendicularmente elevadas: luego siendo iguales las bases, y las elevaciones, seràn los prismas iguales; ò porque los prismas son los productos de los triangulos, que son las bases, multiplicadas por la misma altura: luego go (a) tienen entre sì estos prismas la misma razon, que las bases multiplicadas; pero (b) estas son iguales: luego tambien los prismas: luego, &c. (a) Theor. univ. (b) Prop. 34 lib. 1.

PROP. XXIX. XXX. Y XXXI.

Los paralelepipedos constituidos sobre una misma base, y en una misma altura, cuyas insistentes estèn, ò no estèn en unas mismas rectas, y los paralelepipedos sobre iguales bases, y en una misma, ò igual altura, son iguales entre sì.

Constan todas del Theorema universal; porque siempre estos paralelepipedos, seràn productos de iguales bases, multiplicados por una tercera cantidad, que es la misma, ò igual altura: luego seràn iguales.

Scholio.

Paralelepipedos iguales sobre iguales bases, tienen igual altura; y los iguales, que tienen igual altura, estàn sobre iguales bases.

THEOR. XXVII. PROP. XXXII.

Los paralelepipedos de una misma altura, tienen entre sì la misma proporcion, que sus bases.

Consta tambien del Theorema universal; porque seràn los productos, que son los paralelepipedos, proporcionales à las

 mag-

magnitudes multiplicadas, que son las Basses: v. gr. Sea la base de un paralelepipedo 3. pies: la de otro sea 6. la altura de entrambos 8. serà un producto 24. y otro 48. que tienen la misma razon, que 3. à 6.

Tambien los paralelepipedos, que tienen una misma base, son entre sì, como sus alturas por la misma razon.

THEOR. XXVIII. PROP. XXXIII.

Semejantes paralelepipedos tienen triplicada la razon de sus lados homologos.

Figur. 28. y 29.

Sean los paralelepipedos semejantes FC. NY. y los lados homologos AC. KY. Digo, que tienen triplicada la razon de estos lados, porque las bases GC. LY. tienen (a) duplicada la razon de AC. à KY. y añadiendo à esta razon duplicada la razon de la altura EA. à la MK. que es la misma razon, que la de AC. à KY. porque siendo semejantes los solidos, es EA. à MK. como (b) AC. à KY. añadiendo, pues, otra razon de AC. à KY. à la duplicada, que tienen las bases de las mismas AC. y KY. resulta la razon triplicada de los lados homologos AC. y KY. que es, &c.

(a) Prop. 19 lib. 6.

(b) Def. 9. lib. 11.

Scholio.

Esto se vè en los numeros con claridad, su-

Ac.

AC. 2. KY. 4. por tener los sòlidos triplicada la razon de 2. à 4. se continuarà esta razon por quatro terminos 2. 4. 8. 16. y serà el sòlido FC. suboctuplo de NY. como 2. lo es de 16. Para que mejor se entienda, sea la base GC. (2. por 1.) 2. LY. (4. por 2.) 8. la altura EA. sea 3. la NL. 6. el producto de EA. 3. por GC. 2. es 6. el de NL. 6. por LY. 8. es 48. y sale tambien el sòlido NY. octuplo del FC. como lo es 48. de 6.

Corolarios.

De aqui se sigue, que dadas quatro continuas proporcionales, es como la primera à la quarta, assi el paralelepipedo sobre la primera, à su semejante sobre la segunda.

Siguese lo segundo, que los paralelepipedos equiangulos, aunque no sean semejantes, tienen la razon compuesta de las bases, y alturas, que son sus generantes.

Porisma.

Si quatro cantidades son proporcionales, el producto de las extremas es igual al producto de las medias: y si de quatro cantidades el producto de las extremas es igual al de las medias, las quatro cantidades son proporcionales.

Sean las quatro proporcionales A. B. C. D. y sean las dos A. B. superficies, y las otras dos C. D. rectas, ò al contrario. Digo, que

BC. AD.
AC.
A.B.C.D. E.

el producto AD. es igual à BC. porque el producto AC. (a) al BC. es como A. à B. y el producto AC. à AD. es como C. à D. esto es, como A. à B. por la suposicion: luego AC. tiene la misma proporcion à los BC. y AD. luego (b) son iguales.

(a) Theor. univ.

(b) Prop. 7. lib. 5.

Sean estos productos iguales. Digo, que las quatro cantidades son proporcionales; porque sino, sea como A. à B. assi C. à E. y serà el producto BC. igual al AE. pero BC. està demostrado igual à AD. luego los productos AE. y AD. seràn iguales: lo que no puede (a) ser.

THEOR. XXIX. PROP. XXXIV.

Bases, y alturas de paralelepipedos iguales son reciprocas; y si tienen bases, y alturas reciprocas, son iguales.

Figur. 26. y 28.

Sean los paralelepipedos iguales FG. FC. y porque el producto de la base BH. y la altura CF. que es el paralelepipedo FG. se supone igual al producto de AH. y AE. que es el paralelepipedo FC. luego (a) es como BH. à AH. assi AE. à FC.

(a) Porism.

Digo lo segundo, que si tienen las bases, y alturas reciprocas, son iguales; porque siendo proporcionales BH. AH. AE. FC. luego el producto de las extremas, que es el el paralelepipedo FG. es igual (a) al de las medias, que es el FC. luego, &c.

Nota.

Esta demostracion comprehende tambien à los paralelepipedos obliquos, que en las mismas, ò iguales bases, y alturas, son iguales à los rectos.

Corolario.

Lo que se ha demostrado de los paralelepipedos en la prop. 29. 30. 31. 32. 33. y 34. conviene tambien à los prismas, que son sus mitades por la 28.

PROP. XXXV.

Si à dos angulos planos iguales, y à sus vertices insistieren dos rectas elevadas, que hagan iguales angulos con las primeras, cada uno al suyo, y desde quatesquiera puntos de las lineas elevadas se tiraren perpendiculares à los planos, en que estàn los angulos propuestos, y de los puntos en que caen las dichas perpendiculares, se tiran rectas à los vertices de los angulos propuestos, estas rectas tiradas con las elevadas haràn iguales angulos.

Es por la 36. que se demostrarà sin ella.

THEOR. XXX. PROP. XXXVI.

El paralelepipedo formado de tres rectas pro-

por-

porcionales, es igual al paralelepipedo equiangulo formado de la media.

ur. 30. Sean las tres rectas A. B. C. y el paralelepipedò DC. tenga la base AC. compuesta de las extremas A. y C. y la altura sea la media B. y el paralelepipedo RS. que es un cubo, tenga todos sus lados iguales à B. y sea el angulo sòlido S. igual à E. Digo, que los sòlidos son iguales; porque en las bases es, como A. à B. assi O. ò su igual B. à EC. luego (a) las bases son iguales, pero las alturas B. tambien son iguales, ò la misma: luego (b) los paralelepipedos son iguales: que es, &c.

Prop.14 .6.

Prop.31 .11.

THEOR. XXXII. PROP. XXXVII.

Paralelepipedos semejantes, y semejantemente descriptos de quatro proporcionales, son proporcionales: y si los paralelepipedos son proporcionales, las rectas de que se describen lo seràn tambien.

Sean las rectas proporcionales A.B.C.D. à las A. B. tomense la tercera, y la quarta proporcionales E. F. y à las C. D. las G. H. y porque los paralelepipedos semejantes tienen (a) triplicada la razon de los lados homologos, serà A. à F. como el paralelepipedo de la A. à su semejante de la B. y como

B. E. F.
D. G. H.

Prop.33 11.

C.

C. à H. asi el paralelepipedo de la C. à su semejante de la D. pero como A. à F. asi es (b) C. à H. luego (c) tambien es como el paralelepipedo de A. à su semejante de B. asi el de la C. à su semejante de la D.

(b) Prop. 34 lib. 5.
(c) Prop. 11 lib. 5.

Sean lo segundo los paralelepipedos proporcionales. Digo, que tambien lo son las rectas A. B. C. D. porque como el paralelepipedo de la A. à su semejante de la B. asi es (a) la A. à la F. y como el de la C. à su semejante de la D. asi la C. à la H. pero A. à F. tiene razon triplicada de A. à B. y C. à H. triplicada de C. à D. luego (d) es A. à B. como C. à D. que es, &c.

(d) Prop. 35 lib. 5.

PROP. XXXVIII.

Si un plano fuere perpendicular à otro, y de un punto tomado en uno de ellos, se tira una perpendicular al otro, caerà en la comun seccion de entrambos.

PROP. XXXIX.

Si los lados de los planos opuestos en un paralelepipedo se cortan en dos partes iguales, y por las secciones se tiran planos, la comun seccion de estos planos, y el diametro del paralelepipedo se cortaràn mutuamente en dos partes iguales.

Estas dos no son menester.

THEOR.

THEOR. XXXV. PROP. XL.

Dos prismas triangulares de igual altura, de los quales el uno tenga por base un paralelogramo, y el otro un triangulo, que sea mitad del paralelogramo, son entre sì iguales.

Figur. 312. Sean los prismas ABCDER. GHYKSM. de los quales el primero tenga por base el paralelogramo AC. duplo del triangulo GHY. que es base del otro, digo, que son iguales; porque si se cumplen los paralelepipedos AN. GQ. tendràn la misma altura, que es la de los prismas, y porque el paralelogramo GP. es (a) duplo del triangulo GHY. como lo era tambien el AC. luego los dos AC. y GP. son iguales: luego los paralelepipedos, que tienen iguales bases, y alturas, son (b) iguales; pero los prismas propuestos son mitades (d) de estos paralelepipedos: luego tambien son iguales: que es, &c.

(a) Prop. 41 lib. 1.

(b) Prop. 31 lib. 11.

(d) Prop. 28. lib. 11.

LIBRO

LIBRO XII.

DEFINICIONES.

1 PYramide, es un sòlido contenido de triangulos, que concurren en un punto, y nacen de un mismo plano, que es la base de la pyramide.

Como el sòlido ZA. que està contenido de los triangulos BAC. CAS. SAR. RAB. que concurren en el punto A. y salen del plano Z. que es la base de la pyramide, y puede ser qualquier figura, de cuyos lados nacen los triangulos, que concurren en A. Figur. 1

2 Cono, que tambien se llama pyramide conica, es una pyramide que tiene por base un circulo. Figur. 2

Como el sòlido ACL. el qual se forma tomando el punto A. fuera del circulo, y tirando la AR. tangente del circulo, y moviendola al rededor hasta que dè una buelta entera, quedando immoble el punto A. y la AR. siempre tangente del circulo CL.

Vertice del cono, es el punto A. la base es el circulo LC. el exe la recta AB. tirada desde el vertice al centro de la base: lado del cono, es la recta AC.

Cono recto es, quando el exe AB. es perpendicular à la base: cono escaleno, quando es obliquo.

Figur. 3. 3 Cilindro es un sòlido, cuyos dos planos opuestos son dos circulos iguales, y paralelos, como CL. OE.

El cilindro se forma, quando al rededor de dos circulos iguales, y paralelos una linea recta diere una buelta entera, quedando siempre paralela à sì misma. La superficie descripta de esta recta, se llama superficie cilindrica, y el cuerpo contenido de ella, y los dos circulos, se llama cilindro.

Las bases del cilindro son los circulos CL. OE. exe es la recta AB. que junta los centros de las bases: lado del cilindro, es la recta CO.

Cilindro recto es, quando el exe es perpendicular à las bases: escaleno, quando no lo es.

Tambien se forma el cilindro recto, quando un rectangulo, como CABO. diere una buelta entera sobre el lado immobile BA.

4 Semejantes conos, y cilindros son los que tienen los exes, y los diametros de las bases proporcionales. *Esto es, como el diametro del cono A. al diametro del cono B. assi el exe de A. al exe de B.*

A. B.

5 Esphera, es un sòlido contenido de una

una ſola ſuperficie, dentro de quien ay un punto, deſde el qual todas las rectas, que ſe tiran à la ſuperficie, ſon entre sì iguales. *Dicho punto es el centro, diametro es la recta, que paſſando por el centro, de ambas partes ſe termina en la ſuperficie.*

La eſphera ſe forma, quando un ſemicirculo de una buelta entera ſobre ſu diametro immobile.

PROP. I.

Los polygonos ſemejantes inſcriptos en circulos, tienen duplicada la razon de ſus diametros.

Es por la 2. que ſe demoſtrarà ſin ella.

LEMA PARA LA PROP. II.

Las periferias ſon entre sì, como ſus diametros.

Porque las periferias BAG. SRO. ſe engendran de los extremos D. S. de las lineas HD. CS. circularmente movidas, que eſtando immobles en los extremos H. C. con con los D. S. ſeñalan la periferia, moviendoſe al rededor: luego à ſeñalar la periferia concurren los extremos D. S. y los ſemidiametros: luego las periferias tienen entre sì la razon de los extremos DS. y de los ſemi- Figur. 42

diametros; pero la proporcion de los ex-
(a) Def. 1. lib. 1. tremos, ò puntos D. S. por ser (a) indivisibles, ò es ninguna, ò es de igualdad: luego solo queda la proporcion de los semidiametros: tienen, pues, las periferias entre sì la misma razon, que sus semidiametros.

THEOR. II. PROP. II.

Los circulos tienen entre sì duplicada la razon de sus diametros.

Figur. 4. Porque los circulos se engendran de los semidiametros HD. CS. que estando immobles en H. y C. movidos circularmente con los extremos D. S. señalan las periferias, y con todo el semidiametro terminan, ò señalan las areas, ò superficies circulares: luego las superficies circulares, que tienen entre sì la proporcion de sus generantes, tienen la de los semidiametros, y periferias; pero (a) las periferias tienen la misma razon, que los semidiametros: luego los circulos tienen entre sì dos veces la razon de sus diametros; luego (b) la tienen duplicada: luego tambien la de sus diametros, que es la misma que la de sus (c) semidiametros: que es, &c.

(a) Lem. antec.

(b) Def. 9. lib. 5.

(c) Prop. 15 lib. 5.

Notese, que no se equivoque la periferia, ò

cir-

circunferencia con todo el circulo; porque la periferia no es mas, que la linea circular, que termina el circulo, y el circulo es toda la superficie plana terminada de aquella linea circular.

Las prop. 3. y 4. son por la 5. que se demostrarà sin ellas.

LEMA PRIMERA.

Si una pyramide se corta con un plano paralelo à la base, la seccion es semejante à la base.

Sea la seccion QRST. paralela à la base BCXO. digo, que es semejante; porque siendo estos planos paralelos, seràn paralelas BC. QR. BO. QT. CO. TR. luego (a) los angulos CBO. RQT. BCO. QRT. son iguales: luego los triangulos BCO. QRT. son equiangulos, y (b) semejantes, y lo mismo se demuestra de los otros, y de los quadrilateros TR. OC. luego: que es, &c. Figur. 5. (a) Prop. 10 lib. 11. (b) Prop. 4. lib. 6.

LEMA II.

Una pyramide de basa paralelograma se parte por el vertice, y angulos opuestos en dos partes iguales.

Digo, que el plano ACO. parte igualmen- Figur. 5.

mente la pyramide propuesta, cuya base es el paralelogramo XB. porque considerando en qualquier parte de la pyramide un
(a) Lem. antec. plano SQ. paralelo à la base XB. serà (a) la seccion un paralelogramo semejante à XB. y los triangulos QRT. RTS. siempre entre sì iguales, como lo son los de la base: luego la pyramide triangular COXA. es igual à la BCOA. por componerse de igual numero de planos iguales.

Las prop. 5. y 6. se demuestran mas facilmente despues de la 7.

THEOR. VII. PROP. VII.

Qualquier pyramide es la tercera parte del prisma, que tiene la misma base, y altura.

Figur. 6. En el prisma triangular DAR. digo, que la pyramide ECAS. que tiene su misma base, y altura, es su tercia parte: el sòlido remanente cortada esta pyramide, es Z. Tirese la diagonal DS. y serà una pyramide, cuya base es el paralelogramo CDRS. y su vertice E. el plano DES. que passa por el
(a) Lem. 2. vertice E. y la diagonal DS. parte (a) dicha pyramide en dos iguales, que son DECS. DERS.

Assimismo en el prisma entero, el sòlido

DECSA.

DECSA. es una pyramide, cuya base es el paralelogramo DEAC. y su vertice S. luego si se parte por la diagonal CE. y por S. se cortarà (a) en dos partes iguales; que son las pyramides DECS. ECAS. y siendo las pyramides DERS. ECAS. iguales à la DECS: seràn todas tres iguales entre sì; y una como ECAS. el tercio de todas tres, ò del prisma su igual: que es, &c.

Lo mismo se entiende de pyramides polygonas, porque asi ellas, como los prismas de igual, y semejante base, se dividiràn en trigonas, y se harà la misma demostracion.

Corolarios.

Qualesquiera pyramides de igual altura tienen entre sì la proporcion, que sus bases; porque los prismas triplos (b) *de las pyramides, si tienen igual altura, tienen* (c) *la misma proporcion de las bases: luego* (d) *tambien las pyramides, que son las 5. y 6.*

(b) Prop. 7. lib. 12.
(c) Corol. Prop. 34. lib. 11.
(d) Prop. 15. lib. 5.

Por la misma razon las pyramides, que tienen iguales bases, y alturas, son iguales.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Las pyramides semejantes tienen triplicada razon de sus lados homologos.

Por-

Porque como un prisma à su semejante; assi (a) una pyramide à su semejante; pero los prismas semejantes tienen (b) triplicada la razon de sus lados homologos: luego tambien los pyramides.

(a) Prop. 15. lib. 5.
(b) Corol. Prop. 34. lib. 11.

THEOR. IX. PROP. IX.

Pyramides iguales tienen bases, y alturas reciprocas; y si tienen bases, y alturas reciprocas, las pyramides son iguales.

Porque los prismas en la misma base, y altura, que las pyramides iguales tienen (a) reciprocas bases, y alturas; y si las tienen reciprocas, son iguales; pero tales prismas son triplos de las (b) pyramides: luego (c) las pyramides tambien tienen, &c.

(a) Corol. Prop. 34. lib. 11.
(b) Prop. 7. lib. 12.
(c) Prop. 15. lib. 5.

LEMA.

Si se dà una cantidad menor, que un cilindro, se podrà inscribir dentro del cilindro un prisma mayor, que aquella cantidad.

Figur. 7.

Sea la cantidad A. menor, que el cilindro, cuya base es B. digo, que se puede inscribir en el cilindro un prisma mayor, que la cantidad A. Estè inscripto en el circulo el quadrado FD. y circunscripto el KH. hagase el octagono LORD. tirese la tangente PLQ. y hagase el paralelogramo PQ.

PQ. sobre estos polygonos, como sobre bases entiendanse prismas de la misma altura, que el cilindro, de los quales, el que està sobre el quadrado circunscripto, rodea el circulo.

Demostracion. Los prismas, que tienen la misma altura, son (a) como sus bases; pero el quadrado inscripto, es (b) mitad del circunscripto: luego tambien el prisma; pero el prisma circunscripto, es mayor que el cilindro: luego el prisma inscripto, que es mitad del circunscripto, es mayor que la mitad del cilindro. Tambien el triangulo PLO. es (c) mitad del rectangulo PQ. luego el prisma sobre el triangulo, que es (a) mitad del que se imagina sobre el rectangulo, es mas que la mitad del segmento cilindrico residuo PLO. y inscribiendo mas, y mas polygonos de duplos lados, como: 16. 32. &c. se irà quitando mas, y mas que la mitad del residuo: luego se vendrà à dexar una cantidad menor que aquella, en que el cilindro excede à la cantidad A. luego se darà un prisma inscripto en el cilindro B. à quien el cilindro B. exceda menos, que à la quantidad A. luego serà el prisma mayor, que el A. que es, &c.

(a) Corol. Prop. 34. lib. 11.

(b) Schol. Prop. 7. l. 4.

(c) Prop. 34 lib. 1.

THEOR. X. PROP. X.

Qualquier cono es la tercia parte del cilindro, que tiene la misma base, y altura.

Figur. 8. Estên sobre el circulo A. un cono, y un cilindro de igual altura, digo, que el cilindro es triplo del cono; porque si el cilindro al cono tiene mayor razon, que tripla, se pudiera dàr una cantidad B. menor que el cilindro, que tuviera al cono razon tripla. Inscriptos polygonos en el circulo, y hechos los prismas dentro del cilindro, se podrà (a) dàr un prisma dentro del cilindro, mayor que la cantidad B. Sea base de aquel prisma el polygono CDEFG. sobre el qual hagase dentro del cono una pyramide, que serà de la misma altura con el cono, cilindro, y prisma, y serà el prisma triplo de la pyramide; (b) pero la cantidad B. es tripla del cono: luego la misma razon ay del prisma à la pyramide, que de B. al cono: luego alternando, el prisma es à B. como la pyramide al cono; pero el prisma es (a) mayor, que B. luego la pyramide inscripta en el cono, es mayor que el cono: lo que no puede ser.

(a) Lem. antec.

(b) Prop. 7. lib. 12.

Si se dice, que el cono al cilindro tiene mayor razon, que subtripla, se harà el prisma mo argumento, y del mismo modo: luego.

THEOR. XI. PROP. XI.

Cilindros, y conos de igual altura tienen entre sì la misma proporcion, que sus bases.

Porque los cilindros, assi rectos, como obliquos, se engendran de las bases, ò perpendicular, ò obliquamente elevadas: luego siendo iguales las elevaciones, por suponerse iguales las alturas, si ay alguna razon de desigualdad, provendrà solo de las bases, y essa sola tendràn los cilindros: ò porque siendo los cilindros de igual altura, el producto de sus bases por una tercera cantidad, que es la altura igual, tendràn (a) entre sì la razon de las cantidades multiplicadas, que son las bases.

(a) Theor. univ. l. 11.

Lo mismo se dice de los conos, que en igual altura tienen la misma razon, que las bases, por ser los conos (b) subtriplos de los cilindros.

(b) Prop. 10 lib. 12.

Corolarios.

Conos, y cilindros de iguales alturas, y bases son entre sì iguales, sean rectos, ò escalenos, ò uno recto, y otro escaleno.

Conos, y cilindros de iguales bases tienen la misma proporcion, que las alturas: demuestrase del mismo modo.

THEOR. XII. PROP. XII.

Semejantes cilindros, y conos tienen triplicada la razon de los diametros de sus bases.

Figur. 3. Porque los cilindros rectos se engendran, quando (a) un rectangulo CABO diere una buelta entera, quedando inmoble el lado AB. luego los cilindros rectos tienen la razon del rectangulo, y de la buelta circular; pero el rectangulo (b) tiene duplicada la razon del lado homologo CA: y la buelta circular, ò periferia tiene (c) la misma razon que el semidiametro CA: añadida, pues, esta à la duplicada del rectangulo, resulta razon triplicada del semidiametro CA. luego los cilindros rectos tienen triplicada la razon de los semidiametros de sus bases: luego tambien la de los diametros, que es la (d) misma que la de los semidiametros.

(a) Def. 3. lib. 12.

(b) Prop. 20 lib. 6.

(c) Lem. Prop. 2. lib. 12.

(d) Prop. 15 lib. 5.

La misma razon triplicada tienen los cilindros obliquangulos, que sobre las mismas bases, y en iguales alturas son (e) iguales à los rectangulos.

(e) Prop. 11 lib. 12.

La misma razon triplicada tienen los conos subtriplos (r) de los cilindros.

(r) Prop. 10 lib. 12.

THEOR.

THEOR. XIII. PROP. XIII.

Si un cilindro se corta con un plano paralelo à sus bases, los segmentos del exe son proporcionales à los segmentos del cilindro.

Es lo mismo que la primera del 6. y la 25. del 11.

THEOR. XIV. PROP. XIV.

Conos, y cilindros de iguales bases, tienen la misma proporcion que las alturas.

Consta del Corolario de la 11. de este.

THEOR. XV. PROP. XV.

Iguales cilindros, y conos tienen reciprocas sus bases, y alturas; y si las tienen reciprocas, son iguales.

	b.	al.
A.	X.	Z.
B.	C.	R.
	b.	al.

Sean los conos, ò cilindros A. B. sus bases X. C. y las alturas Z. R. digo, que es X. à C. como R. à Z. porque el producto de las extremas X. Z. que es el cono, ò cilindro A. se supone igual al de las medias C. R. que es el cono, ò cilindro B. luego es (a) como X. à C. assi R. à Z. y si es como X. à C. assi R. à Z. luego (a) el producto XZ. es igual al CR. y los solidos seràn iguales: que es, &c.

(a) Poris. lib. 11.

Scholio.

Un paralelepipedo à otro, y un cilindro à otro, tienen la razon compuesta de las razones

de

de sus bases, y alturas. Y porque estos solidos no tienen otras generantes, que sus bases, y sus alturas: la misma razon tienen los prismas, mitades (a) de los paralelepipedos: las pyramides subtriplas (b) de los prismas, y los conos subtriplos (c) de los cilindros.

(a) Prop. 28 lib. 11.
(b) Prop. 7. lib. 12.
(c) Prop. 10 lib. 12.

Las proposic. 16. y 17. sirven para demostrar la 18. que en este methodo no necessita de ellas.

THEOR. XVI. PROP. XVIII.

Las espheras tienen triplicada la razon de sus diametros.

Porque las espheras se engendran, quando (a) el semicirculo dà una buelta entera sobre el diametro inmoble: tendràn las espheras la razon del semicirculo, y de la buelta circular; pero los semicirculos, ò los circulos, que tienen (b) la misma razon que los semicirculos, tienen (c) duplicada la razon de sus semidiametros: luego añadiendo à esta razon duplicada la razon de la buelta circular de los mismos semidiametros, ò la de las periferias, que señalan sus extremos, que es tambien (d) la de los semidiametros, tendràn las espheras entre sì tres veces la razon de sus semidiametros, ò triplicada razon de sus semidiametros: lue-

(a) Def. 5. lib. 12.
(b) Prop. 15 lib. 5.
(c) Prop. 2. lib. 12.
(d) Lem. 2. lib. 12.

luego tambien la de sus diametros, que es la misma (b) que la de los semidiametros.

Corolarios.

1 *Conocida la proporcion de los diametros, queda conocida la proporcion de las mismas espheras, como si el diametro de una esphera es 2. y el de otra es 4. la proporcion de 2. à 4. se continuarà por 4. terminos 2. 4. 8. 16. y serà la mayor à la menor esphera, como 16. à 2. esto es octupla.*

Lo mismo, que de los diametros de las espheras, se entiende de los lados homologos de los sòlidos semejantes, paralelepipedos, prismas, pyramides, cilindros, y conos; porque el cono, cuya base tuviere 4. por diametro, serà octuplo del semejante, que tuviere en la base por diametro 2. Consta de lo demostrado.

Infierese tambien el modo de aumentar, ò disminuir qualquiera de estos cuerpos en qualquier razon dada, como si se pide un cubo B. triplo del cubo A. tomese el lado del A. que sea C. y hagase la linea D. tripla de C. entre C. y D. busquense (Schol. de la 13. del 6.) dos medias proporcionales X. Z. y sea C. à X. como X. à Z. y como X. à Z. assi Z. à D. y serà el cubo sobre X. que es el B. triplo del A. porque siendo continuas proporcionales C. X. Z. D. serà (r) como

A. C. X.
B. D. Z.

(r) Prop. 33. lib. 11.

C.

será D. triplo del cubo de C. que es el A. [illegible] de X. que es el B. pero C. se supone subtripla de D. luego el cubo A. es subtriplo del B.

2 Siguese la dimension de la solidez de estos cuerpos; porque (a) los paralelepipedos, y los (b) cilindros, se miden multiplicando toda el area de la base por toda la altura: los prismas (c) multiplicando el area del triangulo, que sirve de base por toda la altura: los (d) conos, y las (e) pyramides multiplicando la base por la tercera parte de su altura.

(a) Prop. 40 lib. 11.
(b) Prop. 11 lib. 12.
(d) Prop. 10 lib. 12.
(e) Prop. 7. lib. 12.

La dimension de la esphera necessita de mas principios.

Fin de los Elementos Geometricos.

O. A. M. D. G. V. Q. M.

altera